



中华人民共和国国家标准

GB/T 4889—2008
代替 GB/T 4889—1985

数据的统计处理和解释 正态分布均值和方差的估计与检验

Statistical interpretation of data—Techniques of
estimation and tests relating to means and variances of
normal distribution

(ISO 2854:1976, MOD)

2008-07-28 发布

2009-01-01 实施



中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局
中国国家标准化管理委员会

发布

目 次

前言	III
1 范围	1
2 规范性引用文件	1
3 术语、定义和符号	1
3.1 术语和定义	1
3.2 符号	2
4 总则	2
5 单正态总体均值的检验与估计	2
5.1 单总体均值的检验	2
5.2 单正态总体均值的区间估计	5
6 两正态总体均值的比较	7
6.1 两总体均值比较的检验	7
6.2 两总体均值差值的区间估计	10
7 单正态总体方差或标准差的检验与估计	12
7.1 单总体方差或标准差的检验	12
7.2 单总体方差或标准差的区间估计	13
8 两总体方差或标准差的比较	14
8.1 两总体方差或标准差比较的检验	14
8.2 两总体方差或标准差比值的区间估计	16
附录 A (规范性附录) 统计数值表	18
附录 B (规范性附录) 使用 p 值进行假设检验	27

前 言

本标准修改采用国际标准 ISO 2854:1976。本标准与 ISO 2854:1976 相比较,技术内容的变化主要包括:

- 将 ISO 中分在两章的方法和示例改为按条叙述,便于理解;
- 在表 C 等许多表的说明中,略去原先大量与前述表相同的重复说明;
- 将涉及的正态性检验部分内容略去;
- 将成对数据比较的内容略去;
- 将结构进行重新安排,每一个方法后面都跟一个说明性示例;
- 增加了规范性附录 B:使用 p 值进行假设检验。

本标准代替 GB/T 4889 1985。本标准与 GB/T 4889—1985 相比较,技术内容的变化主要包括:

- 按 GB/T 1.1—2000《标准化工作导则 第1部分:标准的结构和编写规则》的要求对标准格式进行了修订;
- 增加了术语、符号和定义;
将样本大小改为样本量;
- 将结构进行重新安排,每一个方法后面都跟一个说明性示例;
- 增加了规范性附录 B:使用 p 值进行假设检验。

本标准的附录 A 和附录 B 均为规范性附录。

本标准由全国统计方法应用标准化技术委员会提出并归口。

本标准起草单位:华东师范大学、中国标准化研究院、北京大学、铁道部。

本标准主要起草人:濮晓龙、李艳、丁文兴、于振凡、孙山泽、邱宏静、杜春平、陈玉忠。

本标准所替代标准的历次版本发布情况为:GB/T 4889—1985。

数据的统计处理和解释

正态分布均值和方差的估计与检验

1 范围

本标准涉及的总体为正态分布。

本标准适用于对总体均值和方差进行估计或检验。

2 规范性引用文件

下列文件中的条款通过本标准的引用成为本标准的条款。凡是注日期的引用文件,其随后所有的修改单(不包括勘误的内容)或修订版均不适用于本标准。然而,鼓励根据本标准达成协议的各方研究是否可使用这些文件的最新版本。凡是不注日期的引用文件,其最新版本适用于本标准。

GB/T 4882—2002 数据的统计处理和解释 正态性检验

ISO 3534-1:2006 统计学词汇及符号 第1部分:一般统计术语与用于概率的术语

ISO 3534-2:2006 统计学词汇及符号 第2部分:应用统计

3 术语、定义和符号

ISO 3534-1:2006 和 ISO 3534-2:2006 确定的术语和定义以及下列术语、定义和符号适用于本标准。为便于参考,某些术语直接引自上述标准。

3.1 术语和定义

3.1.1

显著性水平 **significance level**

α

在假设检验中,原假设为真而拒绝原假设(犯第一类错误)的概率的最大值。

注1:对双侧检验情形,显著性水平 α 就是原假设为真而拒绝原假设的概率;对单侧检验情形,显著性水平 α 就是这一概率的最大值。

注2: α 的取值应根据使用者准备承受的风险选取,实际中, α 常被取作 0.05 或 0.01。由于一个假设有可能在 $\alpha=0.05$ 时被拒绝而在 $\alpha=0.01$ 时未被拒绝,此时采用以下说法是合适的:“原假设在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下被拒绝”,或“原假设在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下未被拒绝”。

注3:特别要注意还存在第二类错误,当原假设错误但未拒绝原假设就犯了这一错误。关于统计检验的术语见 ISO 3534-1:2006。

3.1.2

置信水平 **confidence level**

$1-\alpha$

被估参数的置信区间包含参数真值的概率。

注1:置信水平通常取 0.95、0.99,即 $\alpha=0.05$ 或 $\alpha=0.01$ 。

3.1.3

p 分位数 **p quantile**

使得分布函数 $F(x)$ 的值不小于 p ($0 < p < 1$) 的 x 的最小值。

3.2 符号

n	样本量
μ	总体均值
σ^2	总体方差
σ	总体标准差
x_1, x_2, \dots, x_n	样本量为 n 的简单随机样本
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	样本均值 ($\sum_{i=1}^n$ 也可记为 \sum , 下同)
$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$	样本方差
$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}$	样本标准差
α	<假设检验>显著性水平
$1-\alpha$	<区间估计>置信水平
u_α	标准正态分布的 α 分位数
$t_\alpha(\nu)$	自由度为 ν 的 t 分布的 α 分位数
$\chi_\alpha^2(\nu)$	自由度为 ν 的 χ^2 分布的 α 分位数
$F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$	自由度为 ν_1 和 ν_2 的 F 分布的 α 分位数

4 总则

4.1 本标准假定样本是随机抽取并且独立的。对无限总体,独立性通常满足;对有限总体,当总体足够大或抽样比足够小(例如小于 1/10)时,独立性也可认为满足。

4.2 本标准假定观测值的分布为正态分布。若实际分布与正态分布偏差不大且样本量不太小,使用本标准中规定的方法是近似合理的,其近似程度对大部分实际情况是足够的。此时要求表 A、B、C、D 中样本量不小于 5,在其他表(A'、B'、C'、D'、E、F、G、H)中样本量不能小于 20。

4.3 关于正态性假设的检验方法详见 GB/T 4882—2002。实际中,通常是根据其他一些信息来假定总体的正态性,而不是根据样本本身。当正态性假设被拒绝时,可采用非参数方法对均值和方差进行估计或检验,或通过适当的变换(例如 $\log(x+a)$ 、 $1/x$ 、 $\sqrt{x+a}$)转换为近似正态分布,再采用本标准中的方法。在使用变换时,变换的选择及结果的解释要谨慎。

4.4 如果只是需要估计变量 X 的均值或方差,无论总体是否服从正态分布,样本均值 \bar{x} 和样本方差 s^2 分别是总体均值 μ 和总体方差 σ^2 的无偏估计。

4.5 对于每一个统计分析,都应该给出有关数据来源和数据收集方法的详细信息,这些信息有助于统计分析结果的解释,特别是计量单位或计量的最小单位都应该具有实际意义。

4.6 若未找到试验、技术等方面的原因,即使观测数据值得怀疑,也不能剔除或者更改。任何被剔除或更改的观测数据及其理由都应予以说明。

5 单正态总体均值的检验与估计

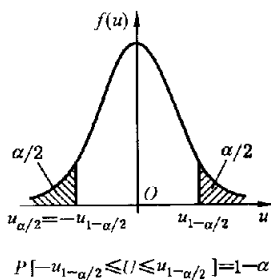
5.1 单总体均值的检验

5.1.1 方差已知的单总体均值的检验

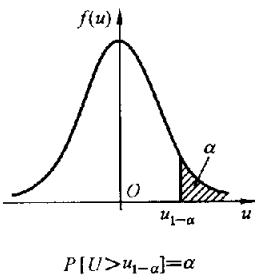
表 A 总体均值和设定值的比较(方差已知)

总体的技术特征(见 4.5) 样本的技术特征(见 4.5) 剔除或更正的观测值(见 4.6)	
统计数据 样本量: $n=$ 观测值和: $\sum x_i=$ 设定值: $\mu_0=$ 已知总体方差: $\sigma^2=$ 或标准差: $\sigma=$ 显著性水平: $\alpha=$	计算 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i=$ $[u_{1-\alpha}/\sqrt{n}]\sigma=$ $[u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}]\sigma=$
判断 双侧检验: 当 $ \bar{x}-\mu_0 >[u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}]\sigma$ 时,拒绝总体均值与设定值相等的假设(原假设)。 单侧检验: a) 当 $\bar{x}-\mu_0<-[u_{1-\alpha}/\sqrt{n}]\sigma$ 时,拒绝总体均值不小于 μ_0 的假设(原假设); b) 当 $\bar{x}-\mu_0>[u_{1-\alpha}/\sqrt{n}]\sigma$ 时,拒绝总体均值不大于 μ_0 的假设(原假设)。	

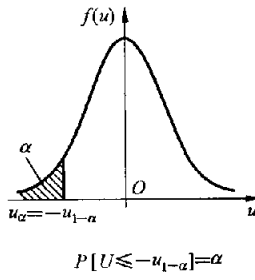
注 1:由标准正态分布 α 分位数 u_α 的定义,有 $u_\alpha=-u_{1-\alpha}$,见下图:



双侧情形



单侧情形



注 2: σ/\sqrt{n} 是抽取 n 个观测值得到的样本均值 \bar{x} 的标准差。

注 3:为方便使用, $u_{1-\alpha}/\sqrt{n}$ 和 $u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}$ 在 $\alpha=0.05$ 及 $\alpha=0.01$ 下的值都在附录 A 的表 A.1 中给出。

注 4:检验也可采用 p 值的方法进行,见附录 B。

示例 某制造商声称其生产的棉纱的平均断裂强度是 $\mu_0=2.40$,对此可进行检验。假设以前各批棉纱断裂强度的波动情况是稳定的,标准差是 $\sigma=0.3315$ 。设随机抽取了 10 个样品,测得棉纱的断裂强度,数据如下:

2.297	2.582	1.949	2.362	2.040
2.133	1.855	1.986	1.642	2.915

根据表 A 的方法,检验的过程如下:

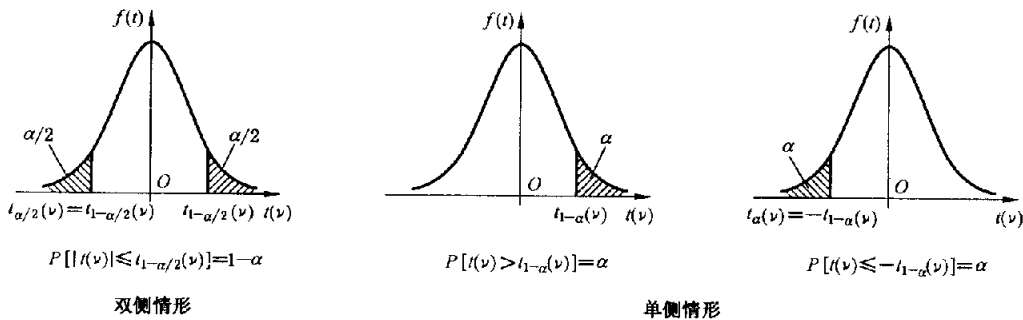
总体的技术特征: 制造商送一批棉纱, 共 10 000 个线轴, 分装在 100 个箱子里, 每个箱子 100 个线轴。 样本的技术特征: 随机抽取 10 个箱子, 每个箱子里随机抽取一个线轴。在距线轴末端大约 5 m 处截取 50 cm 长的棉纱作为测试材料, 实际做实验时只取中间 25 cm。断裂强度的单位是 N。 剔除或更正的观测值: 无。	
统计数据 样本量: $n=10$ 观测值和: $\sum x_i=21.761$ 设定值: $\mu_0=2.40$ 已知标准差: $\sigma=0.331\ 5$ 显著性水平: $\alpha=0.05$	计算 $\bar{x}=\frac{21.761}{10}=2.176\ 1$ 由附录 A 表 A.1, $(u_{0.975}/\sqrt{10})\sigma=0.619\ 8\times 0.331\ 5=0.205\ 5$
判断 双侧检验: $ \bar{x}-\mu_0 = 2.176\ 1-2.40 =0.223\ 9>0.205\ 5$ 在 0.05 显著性水平下拒绝总体均值等于 2.40 的假设。	

5.1.2 方差未知的单总体均值的检验

表 A' 总体均值和设定值的比较(方差未知)

总体的技术特征 样本的技术特征 剔除或更正的观测值	
统计数据 样本量: $n=$ 观测值和: $\sum x_i=$ 观测值平方和: $\sum x_i^2=$ 设定值: $\mu_0=$ 自由度: $\nu=n-1$ 显著性水平: $\alpha=$	计算 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i=$ $s^2=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-(\sum x_i)^2/n}{n-1}$ $s/\sqrt{n}=$ $[s/\sqrt{n}]t_{1-\alpha}(\nu)=$ $[s/\sqrt{n}]t_{1-\alpha/2}(\nu)=$
判断 双侧检验: 当 $ \bar{x}-\mu_0 >[s/\sqrt{n}]t_{1-\alpha/2}(\nu)$ 时, 拒绝总体均值与设定值相等的假设。 单侧检验: a) 当 $\bar{x}-\mu_0<-[s/\sqrt{n}]t_{1-\alpha}(\nu)$ 时, 拒绝总体均值不小于 μ_0 的假设; b) 当 $\bar{x}-\mu_0>[s/\sqrt{n}]t_{1-\alpha}(\nu)$ 时, 拒绝总体均值不大于 μ_0 的假设。	

注 1: 由自由度为 ν 的 t 分布的 α 分位数 $t_\alpha(\nu)$ 的定义, 有 $t_\alpha(\nu)=-t_{1-\alpha}(\nu)$, 见下图:



注 2: s/\sqrt{n} 是抽取 n 个观测值得到的样本均值 \bar{x} 的标准差的估计, 即样本均值 \bar{x} 的标准误。

注 3: 为方便使用, $t_{1-\alpha/2}(\nu)/\sqrt{n}$ 和 $t_{1-\alpha}(\nu)/\sqrt{n}$ 在 $\alpha=0.05$ 及 $\alpha=0.01$ 下的值在附录 A 的表 A.3 中给出。

示例 设需要解决的问题与 5.1.1 中的示例相同,但此时方差未知,必须从样本中估计出来。这可能是因为以前留下的测量数据,或者认为它们已经不再适用了。使用表 A' 的方法对 5.1.1 中的示例的数据进行分析:

总体的技术特征:制造商送达一批棉纱,共 10 000 个线轴,分装在 100 个箱子里,每个箱子 100 个线轴。 样本的技术特征:随机抽取 10 个箱子,每个箱子里随机抽取一个线轴。在距线轴末端大约 5 m 处截取 50 cm 长的棉纱作为测试材料,实际做实验时只取中间 25 cm。断裂强度的单位是 N。 剔除或更正的观测值:无。	
统计数据 样本量: $n=10$ 观测值和: $\sum x_i=21.761$ 观测值平方和: $\sum x_i^2=48.6105$ 设定值: $\mu_0=2.40$ 自由度: $\nu=10-1=9$ 显著性水平: $\alpha=0.05$	计算 $\bar{x}=\frac{21.761}{10}=2.1761$ $s^2=\frac{48.6105-\frac{21.761^2}{10}}{10-1}=0.1396$ $s/\sqrt{10}=0.1182$ 由附录 A 表 A.2: $(s/\sqrt{10})t_{0.975}(9)=0.1182 \times 2.2622=0.2673$
判断 双侧检验: $ \bar{x}-\mu_0 = 2.1761-2.40 =0.2239 < 0.2673$ 在 0.05 显著性水平下不拒绝总体均值等于 2.40 的假设。	

注 1: 尽管未拒绝原假设,也不能确信制造商的声称是对的。

注 2: 此处样本标准差 $s=0.3736$ 比 5.1.1 中示例所用的标准差($\sigma=0.3315$)大,由于掌握的信息不同,得到的结论不同。

注 3: 当对由以往经验所得的方差是否仍然适用存在疑问时,使用方差的估计值会可靠一些。

5.2 单正态总体均值的区间估计

5.2.1 方差已知的单总体均值的区间估计

表 B 总体均值的区间估计(方差已知)

总体的技术特征 样本的技术特征 剔除或更正的观测值	
统计数据 样本量: $n=$ 观测值和: $\sum x_i=$ 已知总体方差: $\sigma^2=$ 或标准差: $\sigma=$ 置信水平: $1-\alpha=$	计算 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i=$ $[u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}]\sigma=$ $[u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}]\sigma=$
结果 总体均值 μ 的点估计: $\hat{\mu}=\bar{x}=$ 双侧置信区间: $\bar{x}-[u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}]\sigma \leq \mu \leq \bar{x}+[u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}]\sigma$ 单侧置信区间: $\mu \leq \bar{x}+[u_{1-\alpha}/\sqrt{n}]\sigma$ 或: $\mu \geq \bar{x}-[u_{1-\alpha}/\sqrt{n}]\sigma$	

示例 仍采用 5.1.1 中的示例中的数据。本例中,我们并不检验总体均值是不是等于某个设定值,而是要找到均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间,可以使用表 B 中的方法。此时还是假设总体方差已从历史数据中得到,为 $\sigma=0.3315$ 。

<p>总体的技术特征:制造商送一批棉纱,共 10 000 个线轴,分装在 100 个箱子里,每个箱子 100 个线轴。</p> <p>样本的技术特征:随机抽取 10 个箱子,每个箱子里随机抽取一个线轴。在距线轴末端大约 5 m 处截取 50 cm 长的棉纱作为测试材料,实际做实验时只取中间 25 cm。断裂强度的单位是 N。</p> <p>剔除或更正的观测值:无。</p>	
<p>统计数据</p> <p>样本量: $n=10$</p> <p>观测值和: $\sum x_i=21.761$</p> <p>已知标准差: $\sigma=0.331\ 5$</p> <p>置信水平: $1-\alpha=0.95$</p>	<p>计算</p> $\bar{x}=\frac{21.761}{10}=2.176\ 1$ <p>由附录 A 表 A.1,</p> $(u_{0.975}/\sqrt{10})\sigma=0.620\times 0.331\ 5=0.205\ 5$
<p>结果</p> <p>总体均值 μ 的点估计: $\hat{\mu}=\bar{x}=2.176\ 1$</p> <p>双侧置信区间:</p> $2.176\ 1-0.205\ 5\leq\mu\leq 2.176\ 1+0.205\ 5$ <p>即 $1.970\ 6\leq\mu\leq 2.381\ 6$</p>	

5.2.2 方差未知的单总体均值的区间估计

表 B' 总体均值的区间估计(方差未知)

<p>总体的技术特征</p> <p>样本的技术特征</p> <p>剔除或更正的观测值</p>	
<p>统计数据</p> <p>样本量: $n=$</p> <p>观测值和: $\sum x_i=$</p> <p>观测值平方和: $\sum x_i^2=$</p> <p>自由度: $\nu=n-1$</p> <p>置信水平: $1-\alpha=$</p>	<p>计算</p> $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i=$ $s^2=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-(\sum x_i)^2/n}{n-1}=$ $s/\sqrt{n}=$ $\lceil s/\sqrt{n} \rceil t_{1-\alpha}(\nu)=$ $\lceil s/\sqrt{n} \rceil t_{1-\alpha/2}(\nu)=$
<p>结果</p> <p>总体均值 μ 的估计: $\hat{\mu}=\bar{x}=$</p> <p>双侧置信区间: $\bar{x}-\lceil s/\sqrt{n} \rceil t_{1-\alpha/2}(\nu)\leq\mu\leq\bar{x}+\lceil s/\sqrt{n} \rceil t_{1-\alpha/2}(\nu)$</p> <p>单侧置信区间: $\mu\leq\bar{x}+\lceil s/\sqrt{n} \rceil t_{1-\alpha}(\nu)$</p> <p>或 $\mu\geq\bar{x}-\lceil s/\sqrt{n} \rceil t_{1-\alpha}(\nu)$</p>	

示例 问题和 5.2.1 中的示例一样,只是此时要用估计值 $\hat{\sigma}=s$ 去代替 σ ,并且使用 t (或 t/\sqrt{n})而不是 u (或 u/\sqrt{n})。使用表 B'中的方法来求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

总体的技术特征:制造商送达一批棉纱,共 10 000 个线轴,分装在 100 个箱子里,每个箱子 100 个线轴。
 样本的技术特征:随机抽取 10 个箱子,每个箱子里随机抽取一个线轴。在距线轴末端大约 5 m 处截取 50 cm 长的棉
 纱作为测试材料,实际做实验时只取中间 25 cm。断裂强度的单位是 N。
 剔除或更正的观测值:无。

统计数据

样本量: $n=10$
 观测值和: $\sum x_i=21.761$
 观测值平方和: $\sum x_i^2=48.610 5$
 自由度 $v=10-1=9$
 置信水平: $1-\alpha=0.95$

计算

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{21.761}{10} = 2.176 1 \\ s^2 &= \frac{48.610 5 - 21.761^2/10}{10-1} = 0.139 6 \\ s/\sqrt{10} &= 0.118 2 \\ \text{由附录 A 表 A.2:} \\ (s/\sqrt{10}) t_{0.975}(9) &= 0.118 2 \times 2.262 2 = \\ &0.267 3\end{aligned}$$

结果

总体均值 μ 的点估计: $\hat{\mu}=\bar{x}=2.176 1$
 双侧置信区间:
 $2.176 1-0.267 3 \leq \mu \leq 2.176 1+0.267 3$
 即 $1.908 8 \leq \mu \leq 2.443 4$

注 1: 本例中的置信区间明显要比方差已知时的大,这是由于此处的样本标准差 $s=0.373 6$ 比 5.2.1 中的示例所用的标准差 ($\sigma=0.331 5$) 大,由于掌握的信息不同,得到的结论不同。

注 2: 当对由以往经验所得的方差是否仍然适用存在疑问时,使用方差的估计值会可靠一些。

注 3: 如果需要置信水平更大一些的置信区间,可以取 $1-\alpha=0.99$,此时的区间会长一些。

从附录 A 表 A.2 可得 $t_{0.995}(9)=3.249 8$,从而:

$$(s/\sqrt{10}) t_{0.995} = 0.118 2 \times 3.249 8 = 0.384 0$$

因此, μ 的置信水平为 0.99 的置信区间是

$$2.176 1-0.384 0 \leq \mu \leq 2.176 1+0.384 0$$

$$\text{即 } 1.792 1 \leq \mu \leq 2.560 1$$

6 两正态总体均值的比较

6.1 两总体均值比较的检验

6.1.1 方差已知的两总体均值比较的检验

表 C 两个总体均值的比较(方差已知)

总体 1 } 的技术特征 总体 2 } 样本 1 } 的技术特征 样本 2 } 样本 1 } 中剔除或更正的观测值 样本 2 }					
统计数据			计算		
	样本 1	样本 2			
样本量:	$n_1 =$	$n_2 =$		$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum x_{1i} =$	$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum x_{2i} =$
观测值和:	$\sum x_{1i} =$	$\sum x_{2i} =$		$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} =$	
已知总体方差:	$\sigma_1^2 =$	$\sigma_2^2 =$		$u_{1-\alpha} \sigma_d =$	$u_{1-\alpha/2} \sigma_d =$
显著性水平:	$\alpha =$				

表 C (续)

判断

双侧检验:

当 $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > u_{1-\alpha/2} \sigma_d$ 成立时, 拒绝两均值相等的假设。

单侧检验:

a) 当 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < -u_{1-\alpha} \sigma_d$ 成立时, 拒绝第一个均值不小于第二个均值的假设;b) 当 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > u_{1-\alpha} \sigma_d$ 成立时, 拒绝第一个均值不大于第二个均值的假设。注: $\sigma_d = \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$ 是分别抽取 n_1 和 n_2 两组观测值得到的两个样本均值的差 $d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ 的标准差。

示例 仍考虑棉纱断裂强度的问题, 随机抽取两种棉纱(分别是“棉纱 1”和“棉纱 2”)并测量其断裂强度, 数据如下:

棉纱 1: 2.297 2.582 1.949 2.362 2.040 2.133 1.855 1.986 1.642 2.915

棉纱 2: 2.286 2.327 2.388 3.172 3.158 2.751 2.222 2.367 2.247 2.512 2.104 2.707

假设总体方差已从历史数据中得到:

$$\sigma_1^2 = 0.109\ 9, \sigma_1 = 0.331\ 5$$

$$\sigma_2^2 = 0.096\ 9, \sigma_2 = 0.311\ 3$$

为对两种棉纱断裂强度均值的比较进行检验, 采用表 C 提供的方法, 得到:

<p>总体的技术特征: 制造商 A 送达一批棉纱, 共 10 000 个线轴; 制造商 B 也送达一批棉纱, 共 12 000 个线轴。这些棉纱都装在能容纳 100 个线轴的箱子里。</p> <p>样本的技术特征: 从两批货物中分别随机抽取 10 和 12 个箱子, 每个箱子里随机抽取一个线轴。在距线轴末端大约 5 m 处截取 50 cm 长的棉纱作为测试材料, 实际做实验时只取中间 25 cm。断裂强度的单位是 N。</p> <p>剔除或更正的观测值: 无。</p>												
统计数据	<table><tr><th>样本 1</th><th>样本 2</th></tr><tr><td>样本量: $n_1 = 10$</td><td>$n_2 = 12$</td></tr><tr><td>样本总和: $\sum x_{1i} = 21.761$</td><td>$\sum x_{2i} = 30.241$</td></tr><tr><td>总体方差: $\sigma_1^2 = 0.109\ 9$</td><td>$\sigma_2^2 = 0.096\ 9$</td></tr><tr><td>显著性水平: $\alpha = 0.05$</td><td></td></tr></table>	样本 1	样本 2	样本量: $n_1 = 10$	$n_2 = 12$	样本总和: $\sum x_{1i} = 21.761$	$\sum x_{2i} = 30.241$	总体方差: $\sigma_1^2 = 0.109\ 9$	$\sigma_2^2 = 0.096\ 9$	显著性水平: $\alpha = 0.05$		计算 $\bar{x}_1 = \frac{21.761}{10} = 2.176\ 1$ $\bar{x}_2 = \frac{30.241}{12} = 2.520\ 1$ $\sigma_d = \sqrt{\frac{0.109\ 9}{10} + \frac{0.096\ 9}{12}} = 0.138\ 1$ $u_{0.975} \cdot \sigma_d = 1.96 \times 0.138\ 1 = 0.270\ 7$
样本 1	样本 2											
样本量: $n_1 = 10$	$n_2 = 12$											
样本总和: $\sum x_{1i} = 21.761$	$\sum x_{2i} = 30.241$											
总体方差: $\sigma_1^2 = 0.109\ 9$	$\sigma_2^2 = 0.096\ 9$											
显著性水平: $\alpha = 0.05$												
判断	<p>双侧情形:</p> $ 2.176\ 1 - 2.520\ 1 = 0.344\ 0 > 0.271$ <p>当显著性水平为 0.05 时拒绝原假设, 即认为两个总体的均值并不相等。从样本均值看, 第二种棉纱的断裂强度更大。</p>											

注: 如果我们不愿意冒 0.05 这么大的错误决策的风险, 可以取 $\alpha = 0.01$, 那么:

$$u_{0.995} \cdot \sigma_d = 2.575\ 8 \times 0.138\ 1 = 0.355\ 7$$

在双侧情形下:

$$|2.176\ 1 - 2.520\ 1| = 0.344\ 0 < 0.355\ 7$$

所以, 在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 时不能拒绝原假设。

6.1.2 方差未知但假设方差相等的两总体均值比较的检验

表 C 两个总体均值的比较(方差未知,但假设方差相等)

总体 1 } 的技术特征 总体 2 } 样本 1 } 的技术特征 样本 2 } 样本 1 } 中剔除或更正的观测值 样本 2 }	
统计数据 样本 1 样本 2 样本量: $n_1 =$ $n_2 =$ 观测值和: $\sum x_{1i} =$ $\sum x_{2i} =$ 观测值平方和: $\sum x_{1i}^2 =$ $\sum x_{2i}^2 =$ 自由度: $\nu = n_1 + n_2 - 2 =$ 显著性水平: $\alpha =$	计算 $\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum x_{1i} =$ $\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum x_{2i} =$ $\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 =$ $s_d = \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \cdot \frac{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}} =$ $t_{1-\alpha}(\nu) s_d =$ 或 $t_{1-\alpha/2}(\nu) s_d =$
判断 双侧检验: 当 $ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 > t_{1-\alpha/2}(\nu) s_d$ 时, 拒绝两均值相等的假设。 单侧检验: a) 当 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < -t_{1-\alpha}(\nu) s_d$ 时, 拒绝第一个均值不小于第二个均值的假设; b) 当 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > t_{1-\alpha}(\nu) s_d$ 时, 拒绝第一个均值不大于第二个均值的假设。	

注: s_d 是分别抽取 n_1 和 n_2 两组观测值得到的两个样本均值的差 $d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ 的标准差的估计, 即 d 的标准误。

示例 考虑与 6.1.1 中示例同样的问题, 实际中, 总体方差 σ_1^2 与 σ_2^2 已知的情况是很少发生的, 因此, 有必要通过样本数据获得方差的估计。需要注意的是, 只有当两总体方差相等时, 采用表 C 的方法对两总体均值的比较进行检验才是妥当的。这里, 我们假设 6.1.1 中示例中的两种棉纱方差相等。

对于 6.1.1 中示例中给出的两个棉纱样本, 采用表 C 提供的方法, 有:

总体的技术特征: 制造商 A 送达一批棉纱, 共 10 000 个线轴; 制造商 B 也送达一批棉纱, 共 12 000 个线轴。这些棉纱都装在能容纳 100 个线轴的箱子里。 样本的技术特征: 从两批货物中分别随机抽取 10 和 12 个箱子, 每个箱子里随机抽取一个线轴。在距线轴末端大约 5 m 处截取 50 cm 长的棉纱作为测试材料, 实际做实验时只取中间 25 cm。断裂强度的单位是 N。 剔除或更正的观测值: 无。	
统计数据 样本 1 样本 2 样本量: $n_1 = 10$ $n_2 = 12$ 观测值和: $\sum x_{1i} = 21.761$ $\sum x_{2i} = 30.241$ 观测值平方和: $\sum x_{1i}^2 = 1.256 4$ $\sum x_{2i}^2 = 1.389 8$ 自由度: $\nu = 10 + 12 - 2 = 20$ 显著性水平: $\alpha = 0.05$	计算 $\bar{x}_1 = 2.176 1, \bar{x}_2 = 2.520 1$ $\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = 2.646 1$ $s_d = \sqrt{\frac{22}{10 \times 12} \cdot \frac{2.646 1}{20}} = 0.155 7$ $s_d t_{0.975}(20) = 0.155 7 \times 2.086 = 0.324 8$
判断 双侧情形: $ 2.176 1 - 2.520 1 = 0.344 0 > 0.324 8$ 当显著性水平为 0.05 时拒绝原假设, 即认为两个总体的均值并不相等。从样本均值看, 第二种棉纱的断裂强度更大。	

注: 如果我们不愿意冒 0.05 这么大的错误决策的风险, 可以取 $\alpha = 0.01$, 那么:

$$t_{0.995}(20) s_d = 2.845 3 \times 0.155 7 = 0.443 0$$

在双侧情形下:

$$|2.176 1 - 2.520 1| = 0.344 0 < 0.443 0$$

所以, 在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 时不能拒绝原假设。

6.2 两总体均值差值的区间估计

6.2.1 方差已知的两总体均值差值的区间估计

表 D 两总体均值差值的区间估计(方差已知)

总体 1 } 的技术特征 总体 2 } 样本 1 } 的技术特征 样本 2 } 样本 1 } 中剔除或更正的观测值 样本 2 }	
统计数据	计算
样本 1 样本 2 样本量: $n_1 =$ $n_2 =$ 观测值和: $\sum x_{1i} =$ $\sum x_{2i} =$ 已知总体方差: $\sigma_1^2 =$ $\sigma_2^2 =$ 置信水平: $1 - \alpha =$	$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum x_{1i} =$ $\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum x_{2i} =$ $\sigma_d = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} =$ $u_{1-\alpha} \sigma_d =$ $u_{1-\alpha/2} \sigma_d =$
结果 两总体均值的差 $d = \mu_1 - \mu_2$ 的估计: $\hat{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 =$ 双侧置信区间: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - u_{1-\alpha/2} \sigma_d \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + u_{1-\alpha/2} \sigma_d$ 单侧置信区间: $\mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + u_{1-\alpha} \sigma_d$ 或 $\mu_1 - \mu_2 \geq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - u_{1-\alpha} \sigma_d$	

示例 仍然采用 6.1.1 中示例中的数据。此处,我们并不检验两总体是否有共同的均值,而是利用两组样本对两总体均值的差值进行估计。对给定的置信水平 $1 - \alpha$,我们希望获得差值 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间。

假定方差 $\sigma_1^2 = 0.109\ 9$ 和 $\sigma_2^2 = 0.096\ 9$ 是由先前观测值而已知的。为得到两种棉纱断裂强度均值的差的区间估计,采用表 D 提供的方法,有:

总体的技术特征:制造商 A 送达一批棉纱,共 10 000 个线轴;制造商 B 也送达一批棉纱,共 12 000 个线轴。这些棉纱都装在能容纳 100 个线轴的箱子里。 样本的技术特征:从两批货物中分别随机抽取 10 和 12 个箱子,每个箱子里随机抽取一个线轴。在距线轴末端大约 5 m 处截取 50 cm 长的棉纱作为测试材料,实际做实验时只取中间 25 cm。断裂强度的单位是 N。 剔除或更正的观测值:无。	
统计数据	计算
样本 1 样本 2 样本量: $n_1 = 10$ $n_2 = 12$ 样本总和: $\sum x_{1i} = 21.761$ $\sum x_{2i} = 30.241$ 总体方差: $\sigma_1^2 = 0.109\ 9$ $\sigma_2^2 = 0.096\ 9$ 置信水平: $1 - \alpha = 0.95$	$\bar{x}_1 = \frac{21.761}{10} = 2.176\ 1$ $\bar{x}_2 = \frac{30.241}{12} = 2.520\ 1$ $\sigma_d = \sqrt{\frac{0.109\ 9}{10} + \frac{0.096\ 9}{12}} = 0.138\ 1$ $u_{0.975} \cdot \sigma_d = 1.96 \times 0.138\ 1 = 0.270\ 7$
结果 两总体均值的差 $d = \mu_1 - \mu_2$ 的估计: $\hat{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -0.344\ 0$ 双侧置信区间: $-0.344\ 0 - 0.270\ 7 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -0.344\ 0 + 0.270\ 7$ 即 $-0.614\ 7 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -0.073\ 3$	

6.2.2 方差未知但假设方差相等的两总体均值差值的区间估计

表 D' 两均值差值的区间估计(方差未知,但假设方差相等)

总体 1 } 的技术特征 总体 2 } 样本 1 } 的技术特征 样本 2 } 样本 1 } 中剔除或更正的观测值 样本 2 }	
统计数据 <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div> 样本 1 样本量: $n_1 =$ 观测值和: $\sum x_1 =$ 观测值平方和: $\sum x_1^2 =$ 自由度: $\nu = n_1 + n_2 - 2 =$ 置信水平: $1 - \alpha =$ </div> <div> 样本 2 样本量: $n_2 =$ 观测值和: $\sum x_2 =$ 观测值平方和: $\sum x_2^2 =$ 自由度: $\nu = n_1 + n_2 - 2 =$ 置信水平: $1 - \alpha =$ </div> </div>	计算 $\bar{x}_1 = \frac{\sum x_1}{n_1} = \quad \bar{x}_2 = \frac{\sum x_2}{n_2} =$ $\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_2 - \bar{x}_2)^2 =$ $s_d = \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \cdot \frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_2 - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}} =$ $t_{1-\alpha}(\nu) s_d = \quad \text{或} \quad t_{1-\alpha/2}(\nu) s_d =$
结果 两总体均值的差 $d = \mu_1 - \mu_2$ 的估计: $\hat{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 =$ 双侧置信区间: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{1-\alpha/2}(\nu) s_d \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{1-\alpha/2}(\nu) s_d$ 单侧置信区间: $\mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{1-\alpha}(\nu) s_d$ 或 $\mu_1 - \mu_2 \geq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{1-\alpha}(\nu) s_d$	

示例 仍然采用 6.1.1 中示例中的数据,要求估计两种棉纱平均断裂负荷差值的置信区间。本例没有基于以往观测值接受 σ_1^2 与 σ_2^2 的值,但是假定未知方差相等。采用表 D' 的方法,结果如下:

总体的技术特征: 制造商 A 送达一批棉纱,共 10 000 个线轴;制造商 B 也送达一批棉纱,共 12 000 个线轴。这些棉纱都装在能容纳 100 个线轴的箱子里。 样本的技术特征: 从两批货物中分别随机抽取 10 和 12 个箱子,每个箱子里随机抽取一个线轴。在距线轴末端大约 5 m 处截取 50 cm 长的棉纱作为测试材料,实际做实验时只取中间 25 cm。断裂强度的单位是 N。 剔除或更正的观测值: 无。	
统计数据 <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div> 样本 1 样本量: $n_1 = 10$ 观测值和: $\sum x_1 = 21.761$ 观测值平方和: $\sum x_1^2 = 1.256 4$ 自由度: $\nu = 10 + 12 - 2 = 20$ 置信水平: $1 - \alpha = 0.95$ </div> <div> 样本 2 样本量: $n_2 = 12$ 观测值和: $\sum x_2 = 30.241$ 观测值平方和: $\sum x_2^2 = 1.389 8$ 自由度: $\nu = 10 + 12 - 2 = 20$ 置信水平: $1 - \alpha = 0.95$ </div> </div>	计算 $\bar{x}_1 = 2.176 1, \bar{x}_2 = 2.520 1$ $\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_2 - \bar{x}_2)^2 = 2.646 1$ $s_d = \sqrt{\frac{22}{10 \times 12} \cdot \frac{2.646 1}{20}} = 0.155 7$ $s_d t_{0.975}(20) = 0.155 7 \times 2.086 = 0.324 8$
结果 两总体均值的差 $d = \mu_1 - \mu_2$ 的估计: $\hat{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -0.344 0$ 双侧置信区间: $-0.344 0 - 0.324 8 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -0.344 0 + 0.324 8$ 即 $-0.668 8 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -0.019 2$	

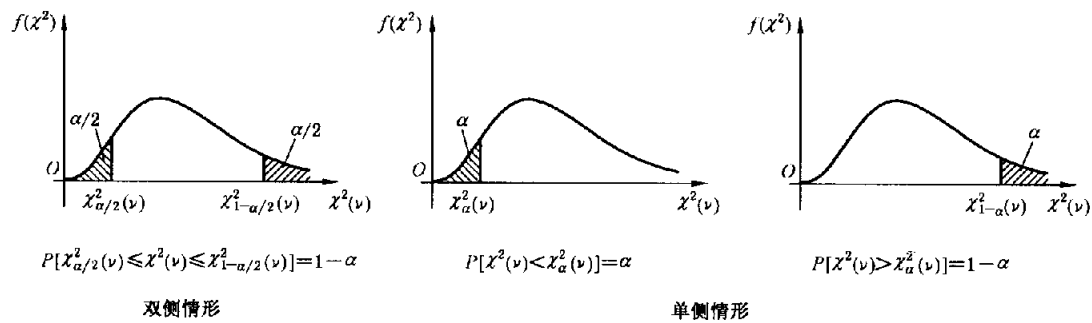
7 单正态总体方差或标准差的检验与估计

7.1 单总体方差或标准差的检验

表 E 方差或标准差与设定值的比较

总体的技术特征 样本的技术特征 剔除或更正的观测值	
统计数据 样本量: $n=$ 观测值和: $\sum x_i=$ 观测值平方和: $\sum x_i^2=$ 设定值: $\sigma_0^2=$ 自由度: $\nu=n-1$ 显著性水平: $\alpha=$	计算 $\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} =$ $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} =$ $\chi_{1-\alpha}^2(\nu) = \quad \chi_{\alpha}^2(\nu) =$ $\chi_{\alpha/2}^2(\nu) = \quad \chi_{1-\alpha/2}^2(\nu) =$
判断 双侧检验: 当 $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha/2}^2(\nu)$ 或 $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha/2}^2(\nu)$ 时, 拒绝总体方差等于设定值 σ_0^2 的假设。 单侧检验: a) 当 $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha}^2(\nu)$ 时, 拒绝总体方差不大于设定值 σ_0^2 的假设; b) 当 $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha}^2(\nu)$ 时, 拒绝总体方差不小于设定值 σ_0^2 的假设。	

注 1: 由自由度为 ν 的 χ^2 分布的 α 分位数 $\chi_{\alpha}^2(\nu)$ 的定义, 有:



注 2: 对 $\alpha=0.05$ 和 $\alpha=0.01$, $\chi_{\alpha}^2(\nu)$, $\chi_{1-\alpha}^2(\nu)$, $\chi_{\alpha/2}^2(\nu)$ 和 $\chi_{1-\alpha/2}^2(\nu)$ 的值可在附录 A 表 A.4 中查得。

示例 使用 5.1.1 中示例中棉纱断裂负荷的 10 个观测值, 此处问题是总体方差不超过设定值 $\sigma_0^2=0.09$ 的假设是否成立。据表 E 中的单侧检验, 有:

总体的技术特征: 制造商送达一批棉纱, 共 10 000 个线轴, 分装在 100 个箱子里, 每个箱子 100 个线轴。 样本的技术特征: 随机抽取 10 个箱子, 每个箱子里随机抽取一个线轴。在距线轴末端大约 5 m 处截取 50 cm 长的棉 纱作为测试材料, 实际做实验时只取中间 25 cm。断裂强度的单位是 N。 剔除或更正的观测值: 无。

<p>统计数据</p> <p>样本量: $n=10$</p> <p>观测值和: $\sum x_i = 21.761$</p> <p>设定值: $\sigma_0^2 = 0.09$</p> <p>显著性水平: $\alpha = 0.05$</p>	<p>计算</p> $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} = \frac{1.2564}{0.09} = 13.9600$ <p>由附录 A 表 A.4,</p> $\chi_{0.95}^2(9) = 16.9190$
<p>判断</p> <p>由于 $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} = 13.9600 < 16.9190$, 故在 0.05 显著性水平下不能拒绝原假设。</p>	

7.2 单总体方差或标准差的区间估计

表 F 方差或标准差的区间估计

<p>总体的技术特征</p> <p>样本的技术特征</p> <p>剔除或更正的观测值</p>	
<p>统计数据</p> <p>样本量: $n=$</p> <p>观测值和: $\sum x_i =$</p> <p>观测值平方和: $\sum x_i^2 =$</p> <p>自由度: $\nu = n - 1$</p> <p>置信水平: $1 - \alpha =$</p>	<p>计算</p> $\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}$ $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$ $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{\alpha}^2(\nu)} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{1-\alpha}^2(\nu)}$ $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{\alpha/2}^2(\nu)} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(\nu)}$
<p>结果</p> <p>总体方差 σ^2 的估计: $\hat{\sigma}^2 = s^2$</p> <p>双侧置信区间: $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(\nu)} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{\alpha/2}^2(\nu)}$</p> <p>单侧置信区间: $\sigma^2 \leq \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{\alpha}^2(\nu)}$</p> <p>或 $\sigma^2 \geq \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{1-\alpha}^2(\nu)}$</p>	

注: 标准差 σ 的置信限是方差 σ^2 置信限的平方根。

示例 仍考虑采用 5.1.1 中示例中棉纱的样本数据来推导未知方差的置信区间。如果取 $1 - \alpha = 0.95$, 据表 F 中的方法, 有:

总体的技术特征: 制造商送达一批棉纱, 共 10 000 个线轴, 分装在 100 个箱子里, 每个箱子 100 个线轴。

样本的技术特征: 随机抽取 10 个箱子, 每个箱子里随机抽取一个线轴。在距线轴末端大约 5 m 处截取 50 cm 长的棉纱作为测试材料, 实际做实验时只取中间 25 cm。断裂强度的单位是 N。

剔除或更正的观测值: 无。

<p>统计数据</p> <p>样本量: $n=10$</p> <p>观测值和: $\sum x_i=21.761$</p> <p>观测值平方和: $\sum x_i^2=48.610\ 5$</p> <p>自由度 $\nu=10-1=9$</p> <p>置信水平: $1-\alpha=0.95$</p>	<p>计算</p> $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 48.610\ 5 - \frac{21.761^2}{10} = 1.256\ 3$ $s^2 = \frac{1.256\ 3}{10-1} = 0.139\ 6$ <p>由附录 A 表 A.4 知,</p> $\chi_{0.025}^2(9) = 2.700\ 4 \quad \chi_{0.975}^2(9) = 19.022\ 8$ <p>故</p> $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{0.025}^2(9)} = \frac{1.256\ 3}{2.700\ 4} = 0.465\ 2$ $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{0.975}^2(9)} = \frac{1.256\ 3}{19.022\ 8} = 0.066\ 0$
<p>结果</p> <p>置信水平为 0.95 的区间估计为 $0.066\ 0 \leq \sigma^2 \leq 0.465\ 2$</p> <p>或 $0.257\ 0 \leq \sigma \leq 0.682\ 1$</p>	

注:如果期望获得更大的置信水平,则置信区间的宽度会变大,例如以 0.99 代替 0.95, $\chi_{0.005}^2(9)$ 和 $\chi_{0.995}^2(9)$ 的值在附录 A 表 A.4 中给出。此时,置信区间变成:

$$0.053\ 3 \leq \sigma^2 \leq 0.724\ 1$$

或

$$0.230\ 8 \leq \sigma \leq 0.850\ 9$$

8 两总体方差或标准差的比较

8.1 两总体方差或标准差比较的检验

表 G 两总体方差或标准差的比较

<p>总体 1 } 的技术特征</p> <p>总体 2 }</p> <p>样本 1 } 的技术特征</p> <p>样本 2 }</p> <p>样本 1 } 中剔除或更正的观测值</p> <p>样本 2 }</p>	
<p>统计数据</p> <p>样本 1 样本 2</p> <p>样本量: $n_1 =$ $n_2 =$</p> <p>观测值和: $\sum x_{1i} =$ $\sum x_{2i} =$</p> <p>观测值平方和: $\sum x_{1i}^2 =$ $\sum x_{2i}^2 =$</p> <p>自由度: $\nu_1 = n_1 - 1$ $\nu_2 = n_2 - 1$</p> <p>显著性水平: $\alpha =$</p>	<p>计算</p> $\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = \sum x_{1i}^2 - \frac{(\sum x_{1i})^2}{n_1} =$ $\sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = \sum x_{2i}^2 - \frac{(\sum x_{2i})^2}{n_2} =$ $s_1^2 = \frac{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1} = \quad s_2^2 = \frac{\sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1} =$ $F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2) = \quad F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) =$ $\frac{1}{F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)} = \quad \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(\nu_2, \nu_1)} =$

表 G (续)

判断

双侧检验:

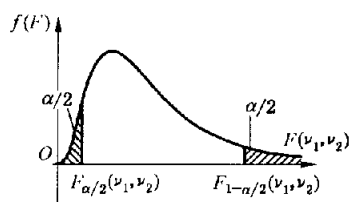
当 $\frac{s_1^2}{s_2^2} < \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(\nu_2, \nu_1)}$ 或 $\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$ 时, 拒绝方差相等的假设。

单侧检验:

a) 当 $\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)$ 时, 拒绝第一个总体的方差不大于第二个总体方差的假设;

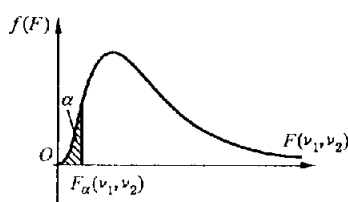
b) 当 $\frac{s_1^2}{s_2^2} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)}$ 时, 拒绝第一个总体的方差不小于第二个总体方差的假设。

注 1: 根据分位数 $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ 的定义, 有



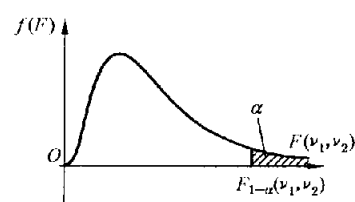
$$P[F_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) \leq F(\nu_1, \nu_2) \leq F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)] = 1 - \alpha$$

双侧情形



$$P[F(\nu_1, \nu_2) < F_\alpha(\nu_1, \nu_2)] = \alpha$$

单侧情形



$$P[F(\nu_1, \nu_2) > F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)] = \alpha$$

注 2: $F_\alpha(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)}$

注 3: 当 $\alpha=0.05$ 或 $\alpha=0.01$ 并且给定自由度 ν_1 和 ν_2 时, $F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)$ 和 $F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$ 的值可从附录 A 的表 A.5 中查得。 $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ 和 $F_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$ 可由 $F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)$ 和 $F_{1-\alpha/2}(\nu_2, \nu_1)$ 计算得到。

示例 采用 6.1.1 中示例中给出的两种棉纱断裂强度的数据, 要求检验两总体是否有相同的方差, 即检验 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 由表 G 的方法, 有:

<p>总体的技术特征: 制造商 A 送达一批棉纱, 共 10 000 个线轴; 制造商 B 也送达一批棉纱, 共 12 000 个线轴。这些棉纱都装在能容纳 100 个线轴的箱子里。</p> <p>样本的技术特征: 从两批货物中分别随机抽取 10 和 12 个箱子, 每个箱子里随机抽取一个线轴。在距线轴末端大约 5 m 处截取 50 cm 长的棉纱作为测试材料, 实际做实验时只取中间 25 cm。断裂强度的单位是 N。剔除或更正的观测值: 无。</p>																				
统计数据	<table> <tr> <th></th><th>样本 1</th><th>样本 2</th></tr> <tr> <td>样本量:</td><td>$n_1=10$</td><td>$n_2=12$</td></tr> <tr> <td>观测值和:</td><td>$\sum x_{1i}=21.761$</td><td>$\sum x_{2i}=30.241$</td></tr> <tr> <td>观测值平方和:</td><td>$\sum x_{1i}^2=1.2564$</td><td>$\sum x_{2i}^2=1.3898$</td></tr> <tr> <td>自由度:</td><td>$\nu_1=9$</td><td>$\nu_2=11$</td></tr> <tr> <td>显著性水平:</td><td colspan="2">$\alpha=0.05$</td></tr> </table>		样本 1	样本 2	样本量:	$n_1=10$	$n_2=12$	观测值和:	$\sum x_{1i}=21.761$	$\sum x_{2i}=30.241$	观测值平方和:	$\sum x_{1i}^2=1.2564$	$\sum x_{2i}^2=1.3898$	自由度:	$\nu_1=9$	$\nu_2=11$	显著性水平:	$\alpha=0.05$		计算
	样本 1	样本 2																		
样本量:	$n_1=10$	$n_2=12$																		
观测值和:	$\sum x_{1i}=21.761$	$\sum x_{2i}=30.241$																		
观测值平方和:	$\sum x_{1i}^2=1.2564$	$\sum x_{2i}^2=1.3898$																		
自由度:	$\nu_1=9$	$\nu_2=11$																		
显著性水平:	$\alpha=0.05$																			
		$s_1^2=0.1396$ $s_2^2=0.1263$ $F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)=F_{0.975}(9, 11)=3.6$ $F_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)=\frac{1}{F_{0.975}(11, 9)}=\frac{1}{4}=0.25$																		
判断	<p>$F=s_1^2/s_2^2=1.10$, 由于观测值满足 $0.25 < 1.10 < 3.6$, 因此没有理由拒绝 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 的假设。</p>																			

8.2 两总体方差或标准差比值的区间估计

表 H 两方差比或两标准差比的区间估计

总体 1 } 的技术特征 总体 2 } 样本 1 } 的技术特征 样本 2 } 样本 1 } 中剔除或更正的观测值 样本 2 }		
统计数据	样本 1 样本 2 样本量: $n_1 =$ $n_2 =$ 观测值和: $\sum x_{1i} =$ $\sum x_{2i} =$ 观测值平方和: $\sum x_{1i}^2 =$ $\sum x_{2i}^2 =$ 自由度: $\nu_1 = n_1 - 1$ $\nu_2 = n_2 - 1$ 置信水平: $1 - \alpha =$	计算 $\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = \sum x_{1i}^2 - \frac{(\sum x_{1i})^2}{n_1} =$ $\sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = \sum x_{2i}^2 - \frac{(\sum x_{2i})^2}{n_2} =$ $s_1^2 = \frac{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1} =$ $s_2^2 = \frac{\sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1} =$ $F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2) =$ $F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) =$ $\frac{1}{F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)} =$ $\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(\nu_2, \nu_1)} =$
结果 两总体方差比 $\delta = \sigma_1^2 / \sigma_2^2$ 的估计: $\hat{\delta} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 / (n_1 - 1)}{\sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 / (n_2 - 1)}$ 双侧置信区间: $\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)} \frac{s_1^2}{s_2^2} \leq \delta \leq F_{1-\alpha/2}(\nu_2, \nu_1) \frac{s_1^2}{s_2^2}$ 单侧置信区间: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1) \frac{s_1^2}{s_2^2}$ 或 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq \frac{1}{F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)} \frac{s_1^2}{s_2^2}$		

注: 标准差 σ_1 和 σ_2 之比的置信区间是方差 σ_1^2 和 σ_2^2 之比置信区间的平方根。

示例 利用 6.1.1 中示例给出的棉纱断裂强度的样本, 可给出两个总体方差比值 σ_1^2 / σ_2^2 的置信区间。由表 H 的方法, 有:

总体的技术特征: 制造商 A 送达一批棉纱, 共 10 000 个线轴; 制造商 B 也送达一批棉纱, 共 12 000 个线轴。这些棉纱都装在能容纳 100 个线轴的箱子里。 样本的技术特征: 从两批货物中分别随机抽取 10 和 12 个箱子, 每个箱子里随机抽取一个线轴。在距线轴末端大约 5 m 处截取 50 cm 长的棉纱作为测试材料, 实际做实验时只取中间 25 cm。断裂强度的单位是 N。 剔除或更正的观测值: 无。		
统计数据	样本 1 样本 2 样本量: $n_1 = 10$ $n_2 = 12$ 观测值和: $\sum x_1 = 21.761$ $\sum x_2 = 30.241$ 观测值平方和: $\sum x_1^2 = 1.256 4$ $\sum x_2^2 = 1.389 8$ 自由度: $\nu_1 = 9$ $\nu_2 = 11$ 置信水平: $1 - \alpha = 0.95$	计算 $s_1^2 = 0.139 6$ $s_2^2 = 0.126 3$ $F_{0.975}(9, 11) = 3.6$ $F_{0.025}(9, 11) = 0.25$

结果

$F = s_1^2 / s_2^2 = 1.10$, 总体方差比值 σ_1^2 / σ_2^2 的置信区间为:

$$\frac{1.10}{3.6} = 0.31 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 4.4 = 4 \times 1.10$$

或
$$0.56 \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \leq 2.10$$

注:因为样本量很小(10 到 20), 0.95 的置信水平所得的置信区间很宽。如果要求更高的置信度(如 0.99), 则因为置信区间过长而没有意义。

附 录 A
(规范性附录)
统计数值表

$u_{1-\alpha}/\sqrt{n}$ 的数值见表 A. 1。

t 分布分位数 $t_{1-\alpha}(\nu)$ 见表 A. 2。

$t_{1-\alpha}(\nu)/\sqrt{n}$ 的数值见表 A. 3。

χ^2 分布分位数见表 A. 4。

F 分布分位数 $F_{0.90}(\nu_1, \nu_2)$ 见表 A. 5. 1。

F 分布分位数 $F_{0.95}(\nu_1, \nu_2)$ 见表 A. 5. 2。

F 分布分位数 $F_{0.975}(\nu_1, \nu_2)$ 见表 A. 5. 3。

F 分布分位数 $F_{0.99}(\nu_1, \nu_2)$ 见表 A. 5. 4。

表 A. 1 $u_{1-\alpha}/\sqrt{n}$ 的数值表

n	双 侧 情 形		单 侧 情 形	
	$u_{0.975}/\sqrt{n}$	$u_{0.995}/\sqrt{n}$	$u_{0.95}/\sqrt{n}$	$u_{0.99}/\sqrt{n}$
1	1.960 0	2.575 8	1.644 9	2.326 3
2	1.385 9	1.821 4	1.163 1	1.645 0
3	1.131 6	1.487 2	0.949 7	1.343 1
4	0.980 0	1.287 9	0.822 4	1.163 2
5	0.876 5	1.151 9	0.735 6	1.040 4
6	0.800 2	1.051 6	0.671 5	0.949 7
7	0.740 8	0.973 6	0.621 7	0.879 3
8	0.693 0	0.910 7	0.581 5	0.822 5
9	0.653 3	0.858 6	0.548 3	0.775 4
10	0.619 8	0.814 5	0.520 1	0.735 7
11	0.591 0	0.776 6	0.495 9	0.701 4
12	0.565 8	0.743 6	0.474 8	0.671 6
13	0.543 6	0.714 4	0.456 2	0.645 2
14	0.523 8	0.688 4	0.439 6	0.621 7
15	0.506 1	0.665 1	0.424 7	0.600 7
16	0.490 0	0.644 0	0.411 2	0.581 6
17	0.475 4	0.624 7	0.398 9	0.564 2
18	0.462 0	0.607 1	0.387 7	0.548 3
19	0.449 6	0.590 9	0.377 4	0.533 7
20	0.438 3	0.576 0	0.367 8	0.520 2
21	0.427 7	0.562 1	0.358 9	0.507 7
22	0.417 9	0.549 2	0.350 7	0.496 0
23	0.408 7	0.537 1	0.343 0	0.485 1

表 A.1(续)

n	双 侧 情 形		单 侧 情 形	
	$u_{0.975}/\sqrt{n}$	$u_{0.995}/\sqrt{n}$	$u_{0.95}/\sqrt{n}$	$u_{0.99}/\sqrt{n}$
24	0.400 1	0.525 8	0.335 8	0.474 9
25	0.392 0	0.515 2	0.329 0	0.465 3
26	0.384 4	0.505 2	0.322 6	0.456 2
27	0.377 2	0.495 7	0.316 6	0.447 7
28	0.370 4	0.486 8	0.310 8	0.439 6
29	0.364 0	0.478 3	0.305 4	0.432 0
30	0.357 8	0.470 3	0.300 3	0.424 7
31	0.352 0	0.462 6	0.295 4	0.417 8
41	0.306 1	0.402 3	0.256 9	0.363 3
51	0.274 4	0.360 7	0.230 3	0.325 8
61	0.250 9	0.329 8	0.210 6	0.297 9
71	0.232 6	0.305 7	0.195 2	0.276 1
81	0.217 8	0.286 2	0.182 8	0.258 5
91	0.205 5	0.270 0	0.172 4	0.243 9
101	0.195 0	0.256 3	0.163 7	0.231 5

表 A.2 t 分布分位数表

ν	双 侧 情 形		单 侧 情 形	
	$t_{0.975}$	$t_{0.995}$	$t_{0.95}$	$t_{0.99}$
1	12.706 2	63.656 7	6.313 8	31.820 5
2	4.302 7	9.924 8	2.920 0	6.964 6
3	3.182 4	5.840 9	2.353 4	4.540 7
4	2.776 4	4.604 1	2.131 8	3.746 9
5	2.570 6	4.032 1	2.015 0	3.364 9
6	2.446 9	3.707 4	1.943 2	3.142 7
7	2.364 6	3.499 5	1.894 6	2.998 0
8	2.306 0	3.355 4	1.859 5	2.896 5
9	2.262 2	3.249 8	1.833 1	2.821 4
10	2.228 1	3.169 3	1.812 5	2.763 8
11	2.201 0	3.105 8	1.795 9	2.718 1
12	2.178 8	3.054 5	1.782 3	2.681 0
13	2.160 4	3.012 3	1.770 9	2.650 3
14	2.144 8	2.976 8	1.761 3	2.624 5
15	2.131 4	2.946 7	1.753 1	2.602 5
16	2.119 9	2.920 8	1.745 9	2.583 5
17	2.109 8	2.898 2	1.739 6	2.566 9
18	2.100 9	2.878 4	1.734 1	2.552 4

表 A.2(续)

ν	双 侧 情 形		单 侧 情 形	
	$t_{0.975}$	$t_{0.995}$	$t_{0.95}$	$t_{0.99}$
19	2.093 0	2.860 9	1.729 1	2.539 5
20	2.086 0	2.845 3	1.724 7	2.528 0
21	2.079 6	2.831 4	1.720 7	2.517 6
22	2.073 9	2.818 8	1.717 1	2.508 3
23	2.068 7	2.807 3	1.713 9	2.499 9
24	2.063 9	2.796 9	1.710 9	2.492 2
25	2.059 5	2.787 4	1.708 1	2.485 1
26	2.055 5	2.778 7	1.705 6	2.478 6
27	2.051 8	2.770 7	1.703 3	2.472 7
28	2.048 4	2.763 3	1.701 1	2.467 1
29	2.045 2	2.756 4	1.699 1	2.462 0
30	2.042 3	2.750 0	1.697 3	2.457 3
40	2.021 1	2.704 5	1.683 9	2.423 3
50	2.008 6	2.677 8	1.675 9	2.403 3
60	2.000 3	2.660 3	1.670 6	2.390 1
70	1.994 4	2.647 9	1.666 9	2.380 8
80	1.990 1	2.638 7	1.664 1	2.373 9
90	1.986 7	2.631 6	1.662 0	2.368 5
100	1.984 0	2.625 9	1.660 2	2.364 2
200	1.971 9	2.600 6	1.652 5	2.345 1
500	1.964 7	2.585 7	1.647 9	2.333 8

表 A.3 $t_{1-\alpha}(\nu)/\sqrt{n}$ 的数值表($\nu=n-1$)

$\nu=n-1$	双 侧 情 形		单 侧 情 形	
	$t_{0.975}/\sqrt{n}$	$t_{0.995}/\sqrt{n}$	$t_{0.95}/\sqrt{n}$	$t_{0.99}/\sqrt{n}$
1	8.984 6	45.012 1	4.464 5	22.500 5
2	2.484 1	5.730 1	1.685 9	4.021 0
3	1.591 2	2.920 5	1.176 7	2.270 4
4	1.241 7	2.059 0	0.953 4	1.675 7
5	1.049 4	1.646 1	0.822 6	1.373 7
6	0.924 8	1.401 3	0.734 5	1.187 8
7	0.836 0	1.237 3	0.669 8	1.059 9
8	0.768 7	1.118 5	0.619 8	0.965 5
9	0.715 4	1.027 7	0.579 7	0.892 2

表 A.3(续)

$\nu=n-1$	双 侧 情 形		单 侧 情 形	
	$z_{0.975}/\sqrt{n}$	$z_{0.995}/\sqrt{n}$	$z_{0.95}/\sqrt{n}$	$z_{0.99}/\sqrt{n}$
10	0.671 8	0.955 6	0.546 5	0.833 3
11	0.635 4	0.896 6	0.518 4	0.784 6
12	0.604 3	0.847 2	0.494 3	0.743 6
13	0.577 4	0.805 1	0.473 3	0.708 3
14	0.553 8	0.768 6	0.454 8	0.677 6
15	0.532 9	0.736 7	0.438 3	0.650 6
16	0.514 2	0.708 4	0.423 4	0.626 6
17	0.497 3	0.683 1	0.410 0	0.605 0
18	0.482 0	0.660 4	0.397 8	0.585 6
19	0.468 0	0.639 7	0.386 6	0.567 8
20	0.455 2	0.620 9	0.376 4	0.551 6
21	0.443 4	0.603 6	0.366 9	0.536 8
22	0.432 4	0.587 8	0.358 0	0.523 0
23	0.422 3	0.573 0	0.349 8	0.510 3
24	0.412 8	0.559 4	0.342 2	0.498 4
25	0.403 9	0.546 7	0.335 0	0.487 4
26	0.395 6	0.534 8	0.328 2	0.477 0
27	0.387 8	0.523 6	0.321 9	0.467 3
28	0.380 4	0.513 1	0.315 9	0.458 1
29	0.373 4	0.503 2	0.310 2	0.449 5
30	0.366 8	0.493 9	0.304 8	0.441 3
40	0.315 6	0.422 4	0.263 0	0.378 4
50	0.281 3	0.375 0	0.234 7	0.336 5
60	0.256 1	0.340 6	0.213 9	0.306 0
70	0.236 7	0.314 2	0.197 8	0.282 5
80	0.221 1	0.293 2	0.184 9	0.263 8
90	0.208 3	0.275 9	0.174 2	0.248 3
100	0.197 4	0.261 3	0.165 2	0.235 2
200	0.139 1	0.183 4	0.116 6	0.165 4
500	0.087 8	0.115 5	0.073 6	0.104 3

表 A.4 χ^2 分布分位数表

ν	双 侧 情 形				单 侧 情 形			
	$\chi_{0.025}^2$	$\chi_{0.975}^2$	$\chi_{0.005}^2$	$\chi_{0.995}^2$	$\chi_{0.05}^2$	$\chi_{0.95}^2$	$\chi_{0.01}^2$	$\chi_{0.99}^2$
1	0.001 0	5.023 9	0.000 0	7.879 4	0.003 9	3.841 5	0.000 2	6.634 9
2	0.050 6	7.377 8	0.010 0	10.596 6	0.102 6	5.991 5	0.020 1	9.210 3
3	0.215 8	9.348 4	0.071 7	12.838 2	0.351 8	7.814 7	0.114 8	11.344 9
4	0.484 4	11.143 3	0.207 0	14.860 3	0.710 7	9.487 7	0.297 1	13.276 7
5	0.831 2	12.832 5	0.411 7	16.749 6	1.145 5	11.070 5	0.554 3	15.086 3
6	1.237 3	14.449 4	0.675 7	18.547 6	1.635 4	12.591 6	0.872 1	16.811 9
7	1.689 9	16.012 8	0.989 3	20.277 7	2.167 3	14.067 1	1.239 0	18.475 3
8	2.179 7	17.534 5	1.344 4	21.955 0	2.732 6	15.507 3	1.646 5	20.090 2
9	2.700 4	19.022 8	1.734 9	23.589 4	3.325 1	16.919 0	2.087 9	21.666 0
10	3.247 0	20.483 2	2.155 9	25.188 2	3.940 3	18.307 0	2.558 2	23.209 3
11	3.815 7	21.920 0	2.603 2	26.756 8	4.574 8	19.675 1	3.053 5	24.725 0
12	4.403 8	23.336 7	3.073 8	28.299 5	5.226 0	21.026 1	3.570 6	26.217 0
13	5.008 8	24.735 6	3.565 0	29.819 5	5.891 9	22.362 0	4.106 9	27.688 2
14	5.628 7	26.118 9	4.074 7	31.319 3	6.570 6	23.684 8	4.660 4	29.141 2
15	6.262 1	27.488 4	4.600 9	32.801 3	7.260 9	24.995 8	5.229 3	30.577 9
16	6.907 7	28.845 4	5.142 2	34.267 2	7.961 6	26.296 2	5.812 2	31.999 9
17	7.564 2	30.191 0	5.697 2	35.718 5	8.671 8	27.587 1	6.407 8	33.408 7
18	8.230 7	31.526 4	6.264 8	37.156 5	9.390 5	28.869 3	7.014 9	34.805 3
19	8.906 5	32.852 3	6.844 0	38.582 3	10.117 0	30.143 5	7.632 7	36.190 9
20	9.590 8	34.169 6	7.433 8	39.996 8	10.850 8	31.410 4	8.260 4	37.566 2
21	10.282 9	35.478 9	8.033 7	41.401 1	11.591 3	32.670 6	8.897 2	38.932 2
22	10.982 3	36.780 7	8.642 7	42.795 7	12.338 0	33.924 4	9.542 5	40.289 4
23	11.688 6	38.075 6	9.260 4	44.181 3	13.090 5	35.172 5	10.195 7	41.638 4
24	12.401 2	39.364 1	9.886 2	45.558 5	13.848 4	36.415 0	10.856 4	42.979 8
25	13.119 7	40.646 5	10.519 7	46.927 9	14.611 4	37.652 5	11.524 0	44.314 1
26	13.843 9	41.923 2	11.160 2	48.289 9	15.379 2	38.885 1	12.198 1	45.641 7
27	14.573 4	43.194 5	11.807 6	49.644 9	16.151 4	40.113 3	12.878 5	46.962 9
28	15.307 9	44.460 8	12.461 3	50.993 4	16.927 9	41.337 1	13.564 7	48.278 2
29	16.047 1	45.722 3	13.121 1	52.335 6	17.708 4	42.557 0	14.256 5	49.587 9
30	16.790 8	46.979 2	13.786 7	53.672 0	18.492 7	43.773 0	14.953 5	50.892 2

表 A.5.1 F 分布分位数 $F_{0.90}(v_1, v_2)$ 表

ν_2	ν_1																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	25	30	60	120	∞
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.43	9.44	9.44	9.45	9.46	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.20	5.19	5.18	5.17	5.17	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.88	3.86	3.85	3.84	3.83	3.82	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.25	3.23	3.22	3.21	3.19	3.17	3.14	3.12	3.11
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.88	2.86	2.85	2.84	2.81	2.80	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.64	2.62	2.61	2.59	2.57	2.56	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.48	2.45	2.44	2.42	2.40	2.38	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.35	2.33	2.31	2.30	2.27	2.25	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.26	2.23	2.22	2.20	2.17	2.16	2.11	2.08	2.06
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.12	2.09	2.08	2.06	2.03	2.01	1.96	1.93	1.91
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.02	2.00	1.98	1.96	1.93	1.91	1.86	1.83	1.80
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.95	1.93	1.91	1.89	1.86	1.84	1.78	1.75	1.72
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.90	1.87	1.85	1.84	1.80	1.78	1.72	1.69	1.66
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.86	1.83	1.81	1.79	1.76	1.74	1.68	1.64	1.61
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.79	1.76	1.74	1.72	1.68	1.66	1.59	1.56	1.52
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.74	1.71	1.69	1.67	1.63	1.61	1.54	1.50	1.46
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.62	1.59	1.56	1.54	1.50	1.48	1.40	1.35	1.30
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.56	1.53	1.50	1.48	1.44	1.41	1.32	1.26	1.20
∞	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.51	1.47	1.45	1.42	1.38	1.35	1.25	1.18	1.06

表 A.5.2 F 分布分位数 $F_{0.95}(v_1, v_2)$ 表

ν_2	ν_1																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	25	30	60	120	∞
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.46	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.71	8.69	8.67	8.66	8.63	8.62	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.87	5.84	5.82	5.80	5.77	5.75	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.64	4.60	4.58	4.56	4.52	4.50	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.96	3.92	3.90	3.87	3.83	3.81	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.53	3.49	3.47	3.44	3.40	3.38	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.24	3.20	3.17	3.15	3.11	3.08	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.03	2.99	2.96	2.94	2.89	2.86	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.86	2.83	2.80	2.77	2.73	2.70	2.62	2.58	2.54
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.64	2.60	2.57	2.54	2.50	2.47	2.38	2.34	2.30
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.48	2.44	2.41	2.39	2.34	2.31	2.22	2.18	2.13
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.37	2.33	2.30	2.28	2.23	2.19	2.11	2.06	2.01
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.29	2.25	2.22	2.19	2.14	2.11	2.02	1.97	1.92
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.22	2.18	2.15	2.12	2.07	2.04	1.95	1.90	1.85
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.11	2.07	2.04	2.01	1.96	1.92	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.04	1.99	1.96	1.93	1.88	1.84	1.74	1.68	1.63
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.86	1.82	1.78	1.75	1.69	1.65	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69	1.66	1.60	1.55	1.43	1.35	1.26
∞	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.10	2.01	1.94	1.88	1.84	1.76	1.70	1.65	1.61	1.58	1.51	1.46	1.32	1.23	1.08

表 A.5.3 F 分布分位数 $F_{0.975}(v_1, v_2)$ 表

v_2	v_1																	∞
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	25	30	
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.44	39.44	39.45	39.46	39.46	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.28	14.23	14.20	14.17	14.12	14.08	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.68	8.63	8.59	8.56	8.50	8.46	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.46	6.40	6.36	6.33	6.27	6.23	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.30	5.24	5.20	5.17	5.11	5.07	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.60	4.54	4.50	4.47	4.40	4.36	4.15
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.13	4.08	4.03	4.00	3.94	3.89	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.80	3.74	3.70	3.67	3.60	3.56	3.34
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.55	3.50	3.45	3.42	3.35	3.31	3.08
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.21	3.15	3.11	3.07	3.01	2.96	2.73
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.98	2.92	2.88	2.84	2.78	2.73	2.49
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.82	2.76	2.72	2.68	2.61	2.57	2.32
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.70	2.64	2.60	2.56	2.49	2.44	2.19
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.60	2.55	2.50	2.46	2.40	2.35	2.09
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.44	2.38	2.34	2.30	2.23	2.18	1.91
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.34	2.28	2.23	2.20	2.12	2.07	1.79
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.09	2.03	1.98	1.94	1.87	1.82	1.49
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.98	1.92	1.87	1.82	1.75	1.69	1.32
∞	5.03	3.70	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.20	2.12	2.05	1.95	1.87	1.81	1.76	1.72	1.63	1.57	1.09

表 A.5.4 F 分布分位数 $F_{0.99}(v_1, v_2)$ 表

ν_2	ν_1																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	25	30	60	120	∞
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.44	99.44	99.45	99.46	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.92	26.83	26.75	26.69	26.58	26.50	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.25	14.15	14.08	14.02	13.91	13.84	13.65	13.56	13.47
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.77	9.68	9.61	9.55	9.45	9.38	9.20	9.11	9.03
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.60	7.52	7.45	7.40	7.30	7.23	7.06	6.97	6.89
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.36	6.28	6.21	6.16	6.06	5.99	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.56	5.48	5.41	5.36	5.26	5.20	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	5.01	4.92	4.86	4.81	4.71	4.65	4.48	4.40	4.32
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.60	4.52	4.46	4.41	4.31	4.25	4.08	4.00	3.91
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.05	3.97	3.91	3.86	3.76	3.70	3.54	3.45	3.37
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.70	3.62	3.56	3.51	3.41	3.35	3.18	3.09	3.01
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.45	3.37	3.31	3.26	3.16	3.10	2.93	2.84	2.76
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.27	3.19	3.13	3.08	2.98	2.92	2.75	2.66	2.57
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.13	3.05	2.99	2.94	2.84	2.78	2.61	2.52	2.43
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.89	2.81	2.75	2.70	2.60	2.54	2.36	2.27	2.18
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.74	2.66	2.60	2.55	2.45	2.39	2.21	2.11	2.01
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.39	2.31	2.25	2.20	2.10	2.03	1.84	1.73	1.61
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.23	2.15	2.09	2.03	1.93	1.86	1.66	1.53	1.39
∞	6.65	4.62	3.79	3.33	3.03	2.81	2.65	2.52	2.42	2.33	2.19	2.09	2.01	1.94	1.89	1.78	1.71	1.48	1.34	1.11

附录 B
(规范性附录)
使用 p 值进行假设检验

B.1 根据 p 值作判断

对给定的显著性水平 α , 根据 p 值对假设作判断的规则是:

- a) 若 p 值 $< \alpha$, 则拒绝原假设;
- b) 若 p 值 $\geq \alpha$, 则不拒绝原假设。

B.2 p 值的计算**B.2.1 方差已知的单总体均值的检验**

表 B-A 方差已知的单总体均值检验中 p 值的计算
(此表中各记号与表 A 对应)

设 U 服从 $N(0,1)$ 。由观测值计算: $u = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}$ 。
p 值的计算: 双侧检验: $p = 2P(U > u) = 2[1 - P(U \leq u)]$; 单侧检验: a) 对于原假设: 总体均值不小于 μ_0 , $p = P(U < u)$; b) 对于原假设: 总体均值不大于 μ_0 , $p = P(U > u) = 1 - P(U \leq u)$ 。
注: 可在 EXCEL 中采用函数 NORMSDIST(u) 计算概率值 $P(U \leq u) (=P(U < u))$ 。

对 5.1.1 中的示例:

计算得: $u = \frac{\sqrt{10}(2.1761 - 2.40)}{0.3315} = -2.1358$ 。那么, $p = 2[1 - P(U \leq 2.1358)]$, 在 EXCEL 中

输入“ $=2 * (1 - \text{NORMSDIST}(2.1358))$ ”, 可得 p 值为 0.0327。由于 p 值小于 $\alpha = 0.05$, 故在 0.05 显著性水平下拒绝总体均值等于 2.40 的假设, 判断结果与 5.1.1 中的示例一致。

B.2.2 方差未知的单总体均值的检验

表 B-A' 方差未知的单总体均值检验中 p 值的计算
(此表中各记号与表 A' 对应)

设 T 服从 $t(n-1)$ 。由观测值计算: $t = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{s}$ 。
p 值的计算: 双侧检验: $p = 2P(T > t)$; 单侧检验: a) 对于原假设: 总体均值不小于 μ_0 , $p = P(T < t) = 1 - P(T \geq t)$; b) 对于原假设: 总体均值不大于 μ_0 , $p = P(T > t)$ 。
注: 可在 EXCEL 中采用函数 TDIST($t, n-1, 1$) 计算概率值 $P(T > t) (=P(T \geq t))$ 。

对 5.1.2 中的示例:

计算得: $t = \frac{\sqrt{10}(2.1761 - 2.40)}{\sqrt{0.1396}} = -1.8950$ 。那么, $p = 2P(T > |-1.8950|)$, 在 EXCEL 中输

入“ $=2 * \text{TDIST}(1.8950, 9, 1)$ ”, 可得 p 值为 0.0906。由于 p 值大于 $\alpha = 0.05$, 故在 0.05 显著性水平下不拒绝总体均值等于 2.40 的假设, 判断结果与 5.1.2 中的示例一致。

B.2.3 方差已知的两总体均值比较的检验

表 B-C 方差已知的两总体均值比较检验中 p 值的计算
(此表中各记号与表 C 对应)

设 U 服从 $N(0,1)$ 。由观测值计算: $u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_d}$ 。
p 值的计算: 双侧检验: $p = 2P(U > u) = 2[1 - P(U \leq u)]$; 单侧检验: a) 对于原假设: 第一个均值不小于第二个均值, $p = P(U < u)$; b) 对于原假设: 第一个均值不大于第二个均值, $p = P(U > u) = 1 - P(U \leq u)$ 。

对 6.1.1 中的示例:

计算得: $u = \frac{2.1761 - 2.5201}{0.1381} = -2.4909$ 。那么, $p = 2[1 - P(U \leq 2.4909)]$, 在 EXCEL 中输入“ $=2 * (1 - \text{NORMSDIST}(2.4909))$ ”, 可得 p 值为 0.0127。由于 p 值小于 $\alpha = 0.05$, 故在 0.05 显著性水平下拒绝原假设, 即认为两个总体的均值并不相等, 判断结果与 6.1.1 中的示例一致。若取 $\alpha = 0.01$, 那么 p 值大于 α , 故在 0.01 显著性水平下不能拒绝原假设。

B.2.4 方差未知但假设方差相等的两总体均值比较的检验

表 B-C' 方差未知但假设方差相等的两总体均值比较检验中 p 值的计算
(此表中各记号与表 C' 对应)

设 T 服从 $t(n_1 + n_2 - 2)$ 。由观测值计算: $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_d}$ 。
p 值的计算: 双侧检验: $p = 2P(T > t)$; 单侧检验: a) 对于原假设: 第一个均值不小于第二个均值, $p = P(T < t) = 1 - P(T \geq t)$; b) 对于原假设: 第一个均值不大于第二个均值, $p = P(T > t)$ 。

对 6.1.2 中的示例:

计算得: $t = \frac{2.1761 - 2.5201}{0.1557} = -2.2094$ 。那么, $p = 2P(T > |-2.2094|)$, 在 EXCEL 中输入“ $=2 * \text{TDIST}(2.2094, 20, 1)$ ”, 可得 p 值为 0.0390。由于 p 值小于 $\alpha = 0.05$, 故在 0.05 显著性水平下拒绝原假设, 即认为两个总体的均值并不相等, 判断结果与 6.1.2 中的示例一致。若取 $\alpha = 0.01$, 那么 p 值大于 α , 故在 0.01 显著性水平下不能拒绝原假设。

B.2.5 单总体方差或标准差的检验

表 B-E 单总体方差或标准差与给定值的比较检验中 p 值的计算
(此表中各记号与表 E 对应)

设 χ^2 服从 $\chi^2(n-1)$ 。由观测值计算: $k = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2}$ 。
p 值的计算: 双侧检验: $p = 2\min\{P(\chi^2 > k), P(\chi^2 < k)\}$; 单侧检验: a) 对于原假设: 总体方差不大于给定值 σ_0^2 , $p = P(\chi^2 > k)$; b) 对于原假设: 总体方差不小于给定值 σ_0^2 , $p = P(\chi^2 < k) = 1 - P(\chi^2 \leq k)$ 。
注: 可在 EXCEL 中采用函数 CHIDIST($k, n-1$) 计算概率值 $P(\chi^2 > k)$ ($=P(\chi^2 \geq k)$)。

对 7.1 中的示例:

计算得: $k = \frac{1.256\ 4}{0.09} = 13.960\ 0$ 。那么, $p = P(\chi^2 > 13.960\ 0)$, 在 EXCEL 中输入 “=CHIDIST(13.960 0,9)”, 可得 p 值为 0.123 8。由于 p 值大于 $\alpha = 0.05$, 故在 0.05 显著性水平下不拒绝总体方差不大于给定值 σ_0^2 , 判断结果与 7.1 中的示例一致。

B.2.6 两总体方差或标准差比较的检验

表 B-G 两总体方差或标准差的比较

(此表中各记号与表 G 对应)

设 F 服从 $F(n_1-1, n_2-1)$ 。由观测值计算: $f = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ 。
<p>p 值的计算:</p> <p>双侧检验: $p = 2\min\{P(F > f), P(F < f)\}$;</p> <p>单侧检验:</p> <p>a) 对于原假设: 第一个总体的方差不大于第二个总体的方差, $p = P(F > f)$;</p> <p>b) 对于原假设: 第一个总体的方差不小于第二个总体的方差, $p = P(F < f) = 1 - P(F \geq f)$。</p>
注: 可在 EXCEL 中采用函数 FDIST(f, n_1-1, n_2-1) 计算概率值 $P(F > f)$ ($=P(F \geq f)$)。

对 8.1 中的示例:

计算得: $f = \frac{0.139\ 6}{0.126\ 3} = 1.105\ 3$ 。那么, $p = 2 \min\{P(F > 1.105\ 3), P(F < 1.105\ 3)\}$, 在 EXCEL 中输入 “=2 * min(FDIST(1.105 3,9,11),1-FDIST(1.105 3,9,11))”, 可得 p 值为 0.860 8。由于 p 值大于 $\alpha = 0.05$, 故在 0.05 显著性水平下不拒绝 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 的假设, 判断结果与 8.1 中的示例一致。

中 华 人 民 共 和 国
国 家 标 准
数据的统计处理和解释
正态分布均值和方差的估计与检验
GB/T 4889 2008

*

中国标准出版社出版发行
北京复兴门外三里河北街16号
邮政编码:100045

网址 www.spc.net.cn

电话:68523946 68517548

中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
各地新华书店经销

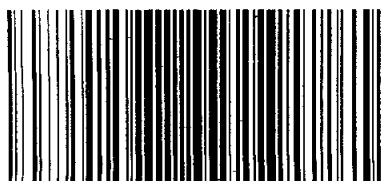
*

开本 880×1230 1/16 印张 2.25 字数 59 千字
2008年11月第一版 2008年11月第一次印刷

*

书号:155066·1-34556 定价 26.00 元

如有印装差错 由本社发行中心调换
版权专有 侵权必究
举报电话:(010)68533533



GB/T 4889-2008