

# 中华人民共和国国家标准

GB/T 17989.4—2020  
代替 GB/Z 4887—2006

## 控制图 第 4 部分：累积和控制图

Control charts—Part 4: Cumulative sum charts

(ISO 7870-4:2011, MOD)

2020-03-06 发布

2020-10-01 实施

国家市场监督管理总局  
国家标准化管理委员会 发布

中 华 人 民 共 和 国  
国 家 标 准  
控制图

第 4 部分：累积和控制图

GB/T 17989.4—2020

\*

中国标准出版社出版发行  
北京市朝阳区和平里西街甲 2 号(100029)  
北京市西城区三里河北街 16 号(100045)

网址: [www.spc.org.cn](http://www.spc.org.cn)

服务热线: 400-168-0010

2020 年 3 月第一版

\*

书号: 155066 • 1-64097

版权专有 侵权必究

## 目 次

前言 .....	Ⅲ
引言 .....	V
1 范围 .....	1
2 规范性引用文件 .....	1
3 术语和定义、缩略语和符号 .....	1
3.1 术语和定义 .....	1
3.2 缩略语 .....	2
3.3 符号 .....	2
4 累积和图概述 .....	3
5 累积和图构建的基本步骤 .....	4
6 累积和图的示例 .....	4
6.1 过程 .....	4
6.2 观测值的折线图 .....	4
6.3 单值控制图 .....	6
6.4 累积和的图形展示 .....	6
6.5 累积和图的构建 .....	6
6.6 累积和图的解释 .....	7
6.7 曼哈顿图 .....	10
7 基于累积和的判定 .....	10
7.1 判定准则的需求 .....	10
7.2 判定基础 .....	10
7.3 判定准则的有效性度量 .....	11
8 累积和图判定方案类型 .....	13
8.1 V 型模板 .....	13
8.2 截顶 V 型模板 .....	13
8.3 可替代的设计方法 .....	18
8.4 半抛物线 V 型模板 .....	19
8.5 扁平鼻 V 型模板 .....	20
8.6 完整 V 型模板 .....	20
8.7 考虑快速初始响应(FIR)的累积和图 .....	21
8.8 表格化累积和图 .....	21
9 过程和质量控制的累积和方法 .....	23
9.1 拟检测变化的类型 .....	23
9.2 目标值的选择 .....	24
9.3 位置监控的累积和图设计方案 .....	25
9.4 波动监控的累积和图设计方案 .....	32

## GB/T 17989.4—2020

9.5 特殊情形 .....	38
9.6 离散数据的累积和图 .....	40
附录 A (资料性附录) 冯诺依曼方法 .....	46
附录 B (资料性附录) 表格化累积和图示例 .....	47
附录 C (资料性附录) 阶跃变化的变点估计 .....	50
参考文献 .....	52

## 前 言

GB/T 17989《控制图》计划分为以下 9 个部分：

- 第 1 部分：通用指南；
- 第 2 部分：常规控制图；
- 第 3 部分：验收控制图；
- 第 4 部分：累积和控制图；
- 第 5 部分：特殊控制图；
- 第 6 部分：指数加权移动平均控制图；
- 第 7 部分：多元控制图；
- 第 8 部分：短周期和小批量控制方法；
- 第 9 部分：自相关过程控制图。

本部分为 GB/T 17989 的第 4 部分。

本部分按照 GB/T 1.1—2009 给出的规则起草。

本部分代替 GB/Z 4887—2006《累积和图 运用累积和技术进行质量控制和数据分析指南》。与 GB/Z 4887—2006 相比，主要技术变化如下：

- 将 GB/Z 4887—2006 之 0.1“累积和图的基础”，调整至本部分第 4 章“累积和图概述”（见第 4 章，GB/Z 4887—2006 的第 0 章）；
- 将 GB/Z 4887—2006 之 0.2“累积和图的简单例子”调整至本部分第 6 章“累积和图的示例”，并丰富和完善了相关内容（见 6.5～6.7，GB/Z 4887—2006 的第 0 章）；
- 增加了术语和定义（见 3.1）；
- 增加了缩略语（见 3.2）；
- 增加了符号（见 3.3）；
- 删除了 GB/Z 4887—2006 第 2 章“累积和图准备”；
- 删除了 GB/Z 4887—2006 第 3 章“图的表示”；
- 将 GB/Z 4887—2006 第 4 章“图的判定规则”调整至本部分第 7 章和第 8 章，其中，第 7 章“基于累积和的判定”明确了累积和判定的基本准则，第 8 章“累积和图方案类型”提供了多种具体的累积和判定方法（见第 7 章和第 8 章，GB/Z 4887—2006 的第 4 章）；
- 增加了半抛物线 V 型模板（见 8.4）；
- 删除了 GB/Z 4887—2006 第 5 章“回顾性分析的判定规则”；
- 删除了 GB/Z 4887—2006 第 7 章“应用示例”；
- 补充了某电机生产过程的示例（见第 6 章）；
- 增加了根据过程性质采取的处理措施（见 7.1）；
- 详细阐述了波动监控的累积和图设计方案（见 9.4）；
- 详细阐述了离散数据的累积和图设计方案（见 9.5）；
- 增加了冯诺依曼方法的介绍（见附录 A）、表格化累积和图示例（见附录 B）与阶跃变化的变点估计（见附录 C）。

本部分使用重新起草法修改采用 ISO 7870-4:2011《控制图 第 4 部分：累积和控制图》。

本部分与 ISO 7870-4:2011 的技术性差异及其原因如下：

- 关于规范性引用文件，本部分做了具有技术性差异的调整，以适应我国的技术条件，调整的情

## GB/T 17989.4—2020

况集中反映在第2章“规范性引用文件”中,具体调整如下:

- 用等同采用国际标准的 GB/T 3358.1 代替 ISO 3534-1(见第3章);
- 用等同采用国际标准的 GB/T 3358.2 代替 ISO 3534-2(见第3章);
- 增加引用了 GB/T 17989.1(见第3章)。

本部分还做了下列编辑性修改:

- 将第6章标题修改为“累积和图的示例”;
- 补充了 9.6.1.3 示例中遗漏的步骤1;
- 补充了 9.6.2.2 示例中遗漏的步骤1;
- 补充了 9.6.2.3 中遗漏的步骤1和步骤3;
- 将 9.6.1.3 和 9.6.2.2 的步骤6,改写为“根据  $H$  和  $K$  值,从表24[计数(泊松)数据在不同  $H$  和  $K$  组合的累积和方案下的平均链长特征]中检索查询其适当方案的性能”的形式,便于指导读者操作和使用。

本部分由全国统计方法应用标准化技术委员会(SAC/TC 21)提出并归口。

本部分起草单位:北京航空航天大学、厦门市以和为贵建设工程有限公司、中国标准化研究院、中国原子能科学研究院、北京航天控制仪器研究所、海丰通航科技有限公司。

本部分主要起草人:杨军、黄硕、郝松华、张帆、洪亮、项石虎、黎磊、孔雪峰、吴胜娜、余欢、陈垚。

本部分所代替标准的历次版本发布情况为:

- GB/T 4887—1985、GB/Z 4887—2006。

## 引 言

本部分介绍了一种简单有效的图形化数据展示方法,显示了其灵活性和实用性,该方法适用于任何有意义的数据序列。这些数据涵盖广泛,可以是宏观商业数据(例如,营业额、利润或者管理费用),也可以是微观操作数据(例如,针对单个过程参数和产品特征进行控制的停工待料和旷工)。数据可以表示为一系列单个数值,这些数值可以用连续刻度表示(例如,24、60、31、21、18、97…),也可以按照“是/否”“好/坏”“成功/失败”的格式表示;当然,数据也可以表示为综合性指标(例如,均值、极差、事件数)。

该方法有一个有趣的名称“累积的总和”,简称“累积和(CUSUM)”。该名称与数据处理的过程有关,每个观测值减去一个预先确定的值(例如,目标值、优先值或参照值)得到一个偏差,并持续累积(累加)这些偏差,得到的累积偏差序列图称为累积和图。这样一个简单的算术过程对数据的形象化解释有显著效果。

世界各地的高尔夫球选手已经不自觉地使用了累积和方法。通过得分“加4”或者“减2”,高尔夫球选手在数值意义上使用了累积和方法。他们从自己的实际得分中减去“标准杆”,然后,累积所得偏差。这就是累积和方法的实际应用。然而,在商业、工业、金融和公共服务领域,累积和方法仍然在很大程度上不为人所知,使用率极低。这可能是由于累积和方法通常使用统计语言表述,而不是实际工作的语言。

本部分旨在帮助使用者理解累积和图,促进该方法的广泛应用和推广。累积和控制图是常规控制图的有益补充,对于小的偏移,累积和图更易于检测和使用。在高尔夫球运动中,当标准杆改变时,累积和图不受影响,常规控制图则要求调整控制线。

除常规控制图之外,还可以使用指数加权移动平均控制图(EWMA)。EWMA图中的每个点汇总了所有子组或观测值的信息,对于更“久远”的过程数据,按照指数衰减趋势,赋予更小的权重。与累积和图类似,EWMA图同样可灵敏地检测过程的小偏移。EWMA图将在本系列标准的另一部分予以讨论。



## 控制图

### 第4部分:累积和控制图

#### 1 范围

GB/T 17989 的本部分描述了应用累积和(CUSUM)技术进行过程监测、控制和回顾性分析的通用性决策方法,提供了用于过程和质量控制的累积和(CUSUM)控制图统计方法。

本部分适用于计量型数据和计数型数据。

#### 2 规范性引用文件

下列文件对于本文件的应用是必不可少的。凡是注日期的引用文件,仅注日期的版本适用于本文件。凡是不注日期的引用文件,其最新版本(包括所有的修改单)适用于本文件。

GB/T 3358.1 统计学词汇及符号 第1部分:一般统计术语与用于概率的术语(GB/T 3358.1—2009,ISO 3534-1:2006, IDT)

GB/T 3358.2 统计学词汇及符号 第2部分:应用统计(GB/T 3358.2—2009,ISO 3534-2:2006, IDT)

GB/T 17989.1 控制图 第1部分:通用指南(GB/T 17989.1—2020,ISO 7870-1:2014, MOD)

#### 3 术语和定义、缩略语和符号

##### 3.1 术语和定义

GB/T 3358.1、GB/T 3358.2 和 GB/T 17989.1 界定的以及下列术语和定义适用于本文件。

###### 3.1.1

**目标值 target value**

$T$

对待检测的偏离进行定位时,所使用的平均水平的值。

注1:图示的累积和是相对于目标值偏离的累加。

注2:使用V型模板,累积和图的目标值经常采用参照值或标称控制值。宜明确指出,与其他标准类似,目标值不一定是最理想的或优先值。它只是用于构建累积和图的一个目标值。

###### 3.1.2

**基准值 datum value**

表格化累积和图中用于计算偏差的标准值。

注:监控向上偏移采用上基准值  $T + f\sigma_e$ ,监控向下偏移采用下基准值  $T - f\sigma_e$ 。

###### 3.1.3

**参照偏移 reference shift**

$F, f$

〈表格化累积和〉目标值(3.1.1)和基准值(3.1.2)之间的差。

注: $f$ 是标准化参照偏移, $F$ 是观测参照偏移  $F = f\sigma_l$ 。

## GB/T 17989.4—2020

## 3.1.4

参照偏移 reference shift

 $F, f$ 

〈截顶 V 型模板〉截顶 V 型模板斜臂的斜率。

注： $f$  是标准化参照偏移， $F$  是观测参照偏移  $F = f\sigma_e$ 。

## 3.1.5

判定区间 decision interval

 $H, h$ 

〈表格化累积和〉表格化累积和图需要发出一个信号时，相对基准值偏离的累积和的值。

注： $h$  用以表示标准化判定区间， $H$  用以表示观测判定区间  $H = h\sigma_e$ 。当相对基准值偏离的累积和超出判定区间时，发出信号。

## 3.1.6

判定区间 decision interval

 $H, h$ 

〈截顶 V 型模板〉截顶 V 型模板在基准值处高度的一半。

注： $h$  用以表示标准化判定区间， $H$  用以表示观测判定区间  $H = h\sigma_e$ 。

## 3.1.7

平均链长 average run length

 $L$ 

在出现一个信号之前采集的平均样本数。

注：平均链长  $L$  经常与某个特定过程水平相关，使用适当的下标进行标识，例如， $L_0$  表示过程在目标水平（即零偏移）时的平均链长。

## 3.2 缩略语

下列缩略语适用于本文件。

ARL: 平均链长 (average run length)

CS1: 零偏移时具有长 ARL 的累积和方案 (cusum scheme with a long ARL at zero shift)

CS2: 零偏移时具有短 ARL 的累积和方案 (cusum scheme with a shorter ARL at zero shift)

DI: 判定区间 (decision interval)

EWMA: 指数加权移动平均 (exponentially weighted moving average)

FIR: 快速初始响应 (fast initial response)

LCL: 下控制限 (lower control limit)

RV: 参照值 (reference value)

UCL: 上控制限 (upper control limit)

## 3.3 符号

下列符号适用于本文件。

 $a$ : 刻度系数 $C$ : 累积和值 $C_r$ : 前导点和失控点之间累积和值的差 $c_4$ : 估计子组的组内标准差的系数 $\delta$ : 拟检测的变化量 $\Delta$ : 拟检测的标准化变化量

$d$ : 前导距离  
 $d_2$ : 根据子组的组内极差, 估计子组的组内标准差的系数  
 $F$ : 观测参照偏移  
 $f$ : 标准化参照偏移  
 $H$ : 观测判定区间  
 $h$ : 标准化判定区间  
 $J$ : 指数个数  
 $\varphi$ : 过程调整量  
 $K$ : 离散数据的累积和基准值  
 $k$ : 子组数量  
 $L_0$ : 零偏移时的平均链长  
 $L_\delta$ : 偏移为  $\delta$  时的平均链长  
 $\mu$ : 总体均值  
 $m$ : 计数数量的均值  
 $n$ : 子组大小  
 $p$ : “成功”概率  
 $\bar{R}$ : 子组极差的平均值  
 $r$ : 前导点和失控点之间绘制的点子数  
 $\sigma$ : 过程标准差  
 $\sigma_0$ : 子组标准差  
 $\hat{\sigma}_0$ : 子组标准差的估计  
 $\sigma_e$ : 标准误差  
 $s$ : 子组观测值的标准差  
 $\bar{s}$ : 子组观测值标准差的平均值  
 $s_{\bar{x}}$ :  $k$  个子组的均值的标准误差  
 $T$ : 目标值  
 $T_m$ : 发生率的参照值或目标值  
 $T_p$ : 比例的参照值或目标值  
 $\tau$ : 真实的变点  
 $t$ : 观测到的变点  
 $V_{\text{avg}}$ : 平均电压  
 $\hat{V}_{\text{avg}}$ : 平均电压的估计值  
 $w$ : 相邻子组均值的差  
 $x$ : 单个观测值  
 $\bar{x}$ : 子组的平均值  
 $\bar{\bar{x}}$ : 子组均值的平均值

#### 4 累积和图概述

累积和控制图本质上是相对于某个事先选定的参照值的运行总偏差。任意一组相邻值的平均值都可以由图形的当前斜率直观表示。累积和控制图具有下列主要特点:

- a) 能够敏感检测平均值的变化。
- b) 平均值的任何变化及其变化程度, 都可以由图形斜率的变化来直观显示:

## GB/T 17989.4—2020

- 1) 水平线表示目标值或参照值;
  - 2) 下降曲线表示平均值小于参照值或目标值:曲线越陡,偏差越大;
  - 3) 上升曲线表示平均值大于参照值或目标值:曲线越陡,偏差越大。
- c) 它可以进行调查目的的回顾性分析,并可以在受控运行的基础上进行短期性能预测。

由 b)可知,累积和控制图具有清楚显示过程变点的能力,这些变点可通过累积和图的梯度变化清晰显示。这对过程管理会有巨大帮助,因为累积和图能够快速、精确地定位过程变化的时间点,进而采取适当的纠正措施。

累积和系统的一个非常有用的特点是,它可以不画图,直接采用表格形式。如果累积和系统用来监控一个高技术性过程(例如,塑料薄膜制造),这是很有帮助的,这时过程参数和产品特征的数量巨大。该过程的数据可以自动获取,下载到累积和软件进行自动化的累积和分析。然后,可以同时提醒过程管理者警惕多个特征的变化。附录 B 给出了该方法的一个例子。

## 5 累积和图构建的基本步骤

对单个观测值数据,建立累积和控制图步骤如下:

步骤 1 选择一个参照值、目标值、控制值或基准值。过去结果的平均通常会提供良好的参照。

步骤 2 把这些结果按照有意义的顺序(例如,时序)制成表格。然后,对每个结果都减去参照值。

步骤 3 将步骤 2 中得到的数值逐步求和。然后,将这些求和绘制成一个累积和图。

步骤 4 为了达到最佳视觉效果,在绘制的点子之间绘制一个不宽于 2.5 mm 的水平刻度(设置绘制点之间的水平刻度不宽于 2.5 mm)。

步骤 5 为合理辨别,避免过度敏感性,推荐采用如下措施:

- a) 为横坐标选择合适的标绘时间间隔,同时,令纵坐标的同一间隔等于  $2\sigma$  (如果绘制均值累积和,则为  $2\sigma_e$ ),并进行适当舍入;
- b) 当要求检测一个已知的变化(比如,  $\delta$ )时,选择纵向刻度,使纵向单位刻度与水平单位刻度的比值介于  $\delta$  和  $2\delta$  之间,并进行适当舍入。

注:刻度的选择在视觉上是非常重要的,因为不适当的刻度会引发累积和图的不稳定性,从而产生灾难即将到来的印象,或者没有发生变化的错觉。a)和 b)宜以合理的方式给出显示变化的一个尺度,使之既不太敏感,又不太迟钝。

## 6 累积和图的示例

### 6.1 过程

假设对于电机生产过程的某一特征,得到了时序排列的一组 40 个观测值。它们是在生产的早期阶段,按照生产顺序记录的不同功率电机的电压值。不过,它们可以是按照某种有意义的顺序采集、使用连续刻度表示的任何单个观测值数据。具体数值如下:

9, 16, 11, 12, 16, 7, 13, 12, 13, 11, 12, 8, 8, 11, 14, 8, 6, 14, 4, 13, 3, 9, 7, 14, 2, 6, 4, 12, 8, 8, 12, 6, 14, 13, 12, 14, 13, 10, 13, 13。

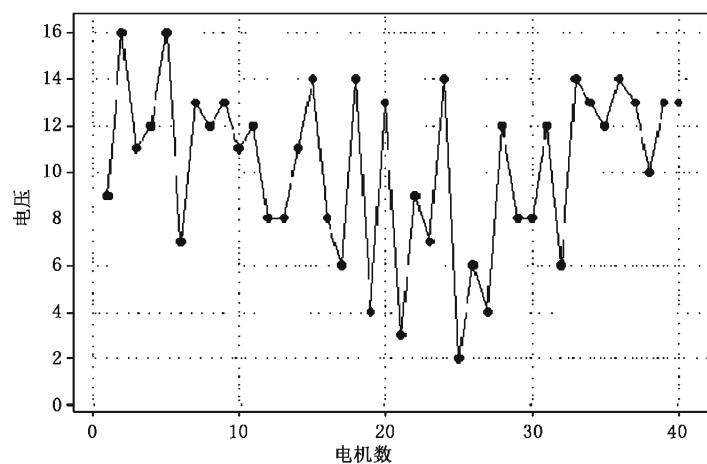
参照电压值或目标电压值为 10 V。

### 6.2 观测值的折线图

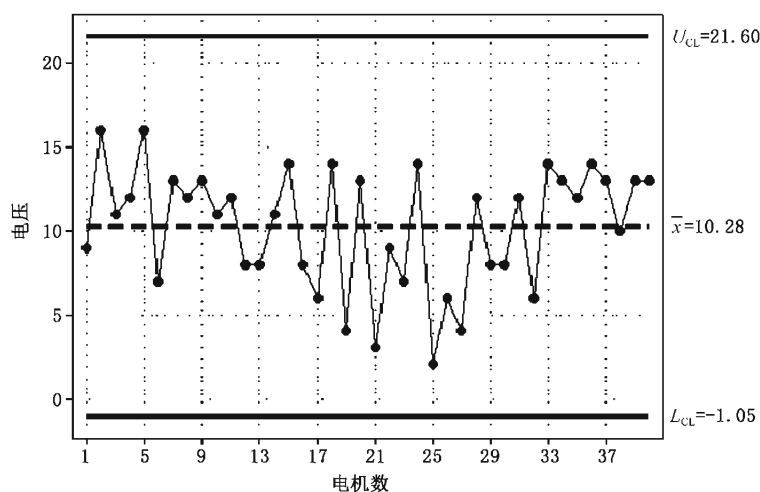
为了更好地理解该过程的潜在表现,通过确定模式和趋势,一个标准的方法就是按照这些数值的自然顺序简单描点,如图 1a)所示。

相对于高的起点和中等高的结尾,在中间部分有一个总的下降偏移,除此之外,图 1a)没有多少启

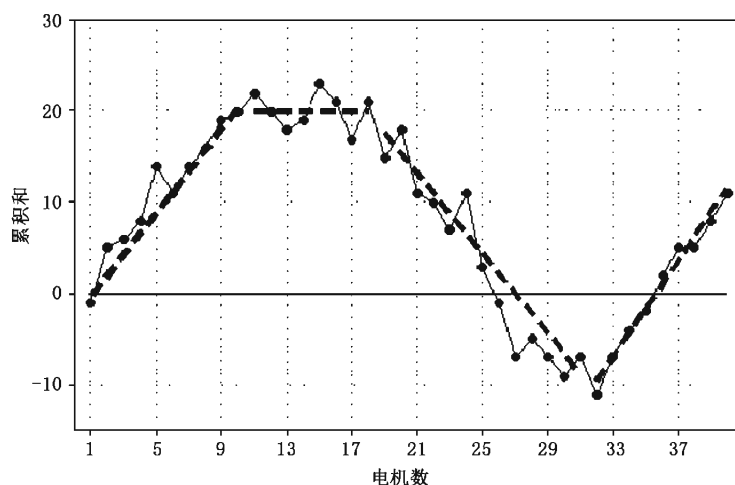
示,因为数据存在极大的噪声、波动尖刻和数据贯穿。



a) 电机电压的简单图



b) 单值的常规控制图



c) 累积和图

图 1 电机电压的例子

### 6.3 单值控制图

更复杂一点的是对单值数据,建立一个常规控制图,如图 1b)所示。

图 1b)甚至比图 1a)的启示更少。实际上,它是相当误导的。对可接受的过程稳定性和控制状态,标准的统计过程控制检验准则是:

- a) 没有数据点落在上控制限(UCL)以上或下控制限(LCL)以下;
- b) 没有连续 7 个或更多的间隔都是向上或向下的;
- c) 没有连续 7 个点都落在中心线上方或下方。

图 1b)对所有这些准则的回答是“不”。因此,有人可以得出这是一个稳定过程的结论,因为它在目标值 10 V 左右的总平均值附近“受控地”波动。进一步的标准分析会发现,尽管该过程是稳定的,但它不满足技术规格要求。然而,对于为什么没有能力满足技术要求,该分析自身不能提供任何进一步的线索。

这里单值常规控制图无能为力的原因是,其控制限是根据实际的过程表现确定的,而不是根据期望的或指定的要求确定。因此,如果过程本身展示了很大的偏差,相应的控制限就会很宽。为了帮助确定并消除主要的变异源,所需方法要能更好地显示模式和趋势,甚至能精确定位变点。

注:通过使用其他工具,如单值和移动极差图,工作人员可以研究其他的过程变异问题。

### 6.4 累积和的图形展示

还有一个值得推荐的选择,就是画累积和图。图 1c)给出了该数据的累积和图。

从图 1 来看,不能直接、明了地看出过程有没有或者在哪里发生了任何显著的变化,然而,累积和图显示了一种意义明确的模式。最优的拟合结果(目测)表明过程水平发生了 4 个变化,具体变化分别发生在第 10 号、第 18 号和第 31 号电机的位置。

注意第 4 章指出,向上(向下)曲线表示该数值比基准值高(低),而水平线则表示过程处于基准值上。因此,可以看出该过程仅在第 11 号~第 18 号电机之间的短暂时间内处于目标值。和第 33 号电机以后的类似,第 1 号~第 10 号电机以高电压运行,而第 19 号~第 32 号电机之间的过程则以低电压运行。

这些变化及其重要性将在 6.6 进一步详细讨论和解释。

在现实生活中,接下来将会找出在这些生产点上发生了什么操作问题,导致电压性能发生如此变化。这直接对改善电压性能保持在 10 V 水平上的一致性提出了一些问题。例如,如何使 32 号电动机的构建特征与 33 号不同?或者,在该点的试验齿轮校准中发生了什么问题?这与偏移、人员或批次变化对应吗?等等。不管什么情况,按照这种方式使用,累积和图都是一个极好的诊断工具。它能指出改进的机会。

### 6.5 累积和图的构建

如该例所示,根据第 5 章给出的简单步骤,使用单值数据构建累积和图。

步骤 1 选择一个参照值 RV。这里,基准值或参照值设定为 10 V。

步骤 2 如表 1 第 2(和 6)列所示,按生产顺序并与电机编号对应,表格化记录电压值;对每个电压值减去参照值 10,记录在表 1 第 3(和 7)列中。

步骤 3 对表 1 的第 3(和 7)列中的数值逐步累加,并将结果记录在第 4(和 8)列中。按观测值(电机)编号,在图 1c)中绘制第 4(和 8)列数值,注意第 5 章步骤 4 和步骤 5 之后“注”中的刻度注释。

表 1 根据单值序列计算累积和值的表格排列

(1) 电动机编号	(2) 电压值	(3) 电压值-10	(4) 累积和	(5) 电动机编号	(6) 电压值	(7) 电压值-10	(8) 累积和
1	9	-1	-1	21	3	-7	+11
2	16	+6	+5	22	9	-1	+10
3	11	+1	+6	23	7	-3	+7
4	12	+2	+8	24	14	+4	+11
5	16	+6	+14	25	2	-8	+3
6	7	-3	+11	26	6	-4	-1
7	13	+3	+14	27	4	-6	-7
8	12	+2	+16	28	12	+2	-5
9	13	+3	+19	29	8	-2	-7
10	11	+1	+20	30	8	-2	-9
11	12	+2	+22	31	12	+2	-7
12	8	-2	+20	32	6	-4	-11
13	8	-2	+18	33	14	+4	-7
14	11	+1	+19	34	13	+3	-11
15	14	+4	+23	35	12	+2	-7
16	8	-2	+21	36	14	+4	-4
17	6	-4	+17	37	13	+3	-2
18	14	+4	+21	38	10	0	+2
19	4	-6	+15	39	13	+3	+5
20	13	+3	+18	40	13	+3	+5

## 6.6 累积和图的解释

### 6.6.1 概述

如该例所示,当以回顾性诊断模式来使用累积和图时,通常不关注单个点子的绘制,而是根据目测最佳拟合,画出穿过数据具有代表性的直线段,如图 1c)所示。

需要注意的是,与传统的数据图一样,不要去解释这些线的斜率和它们的纵坐标相对位置。同时注意,纵坐标刻度不表示实际的电压值。

照例,向上或向下倾斜的直线并不表示过程的水平在上升或下降,而表示等于一个高或低于参照值的常数。倾斜的越陡,表示与参照值的偏差越大。水平线表示过程水平恒等于参照值。接下来,详细讨论电机累积和图的解释。

### 6.6.2 “虚拟无噪声”数据累积和图的解释基础

如表 2 第 2 列所示,假设前 18 个电机电压,按顺序依次为 10,10,10,13,13,13,10,10,10,9,9,9,10,10,10,8,8,8,而参照值仍为 10 V。

GB/T 17989.4—2020

表 2 用来描述累积和图基本解释的虚拟电机数据

(1) 电动机编号	(2) 电压值	(3) 电压值-10	(4) 累积和	(1) 电动机编号	(2) 电压值	(3) 电压值-10	(4) 累积和
1	10	0	0	10	9	-1	+8
2	10	0	0	11	9	-1	+7
3	10	0	0	12	9	-1	+6
4	13	+3	+3	13	10	0	+6
5	13	+3	+6	14	10	0	+6
6	13	+3	+9	15	10	0	+6
7	10	0	+9	16	8	-2	+4
8	10	0	+9	17	8	-2	+2
9	10	0	+9	18	8	-2	0

所得累积和图,如图 2 所示。

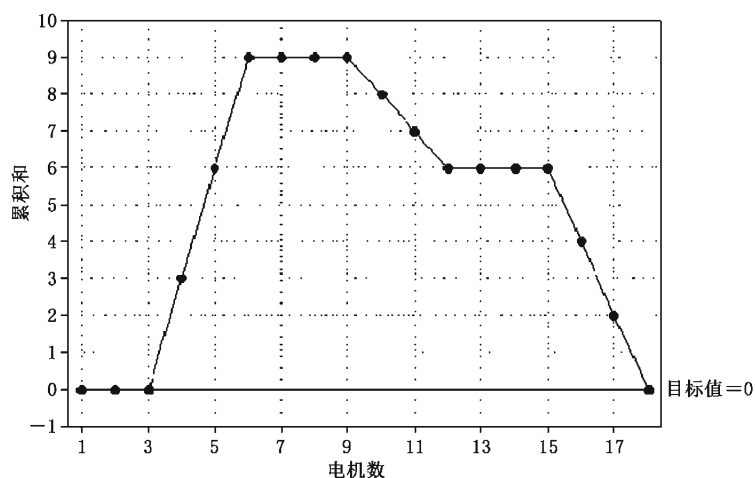


图 2 虚拟电机电压数据的累积和图

通过对比表 2 第 2 列中的实际电压值与图 2 中的累积和图,可以看出:

- 电机 1 号~3 号、7 号~9 号和 13 号~15 号全部在参照值 10 V 上,它们全由累积和图的水平线来表示。同时注意,该水平线的纵坐标刻度与这些电机的实际电压没有关系,而与先前电机的性能相关。
- 电机 4 号~6 号的电压比参照值高 3 V,而且这些电机由累积和图中向上的斜线来表示。显然,这些电机的电压值没有变异,使问题变得简单。如果数据存在噪声,则根据一段特定的斜线来计算平均值,见式(1)。

$$\text{平均值} = \text{参考值} + \left( \frac{\text{线段结束处的累积和值} - \text{线段开始处的累积和值}}{\text{介于观测区间的观测数量}} \right) \dots\dots\dots (1)$$

$$V_{\text{avg}} = 10 + \left( \frac{9 - 0}{3} \right) = 13$$

- 同理,对电机 9 号~12 号。

$$V_{\text{avg}} = 10 + \left( \frac{6-9}{3} \right) = 9$$

d) 对电机 16 号~18 号。

$$V_{\text{avg}} = 10 + \left( \frac{0-6}{3} \right) = 8$$

综上,累积和图 2 中不同的斜线段表明:

——电机 1 号~3 号、7 号~9 号和 13 号~15 号的电压恒为 10 V;

——电机 4 号~6 号的电压恒为 13 V;

——电机 9 号~12 号的电压恒为 9 V;

——电机 16 号~18 号的电压恒为 8 V。

通过回溯上述“无噪声”数据,这些结论是明显的。但对表 1 第 2 列和第 6 列中的真实“噪声”数据,结论就没有那么明显了。

### 6.6.3 使用真实数据的解释

图 1c) 中的累积和图表明:

a) 电机 1 号~10 号的平均电压水平要比参照电压值高。该计算值可根据斜线段算出,见式(2)。

$$\text{平均值} = \text{参考值} + \left( \frac{\text{线段结束处的累积和值} - \text{线段开始处的累积和值}}{\text{介于观测区间的观测数量}} \right) \dots\dots\dots(2)$$

$$V_{\text{avg}} = 10 + \left( \frac{20-0}{10} \right) = 12 \text{ V}$$

b) 同理,对电机 11 号~18 号,平均电压值=10 V,因为对应的线段是水平的。

c) 对电机 19 号~31 号。

$$\hat{V}_{\text{avg}} = 10 + \left( \frac{-12-20}{13} \right) \approx 7.5 \text{ V}$$

d) 对电机 32 号~40 号。

$$V_{\text{avg}} = 10 + \left[ \frac{11 - (-12)}{9} \right] \approx 12.6 \text{ V}$$

综上,累积和图能计算与实际工艺性能相匹配的可变周期移动平均值。相对于常用的、标准的、预定不变的移动平均方法,这是一个相当大的进步。结果的整体估计见表 3。

作为上述累积和斜率与平均电压之间关联关系计算方法的替代,对累积和图的每个恒定水平部分,可以简单计算局部移动平均值。

例如,对电机 1 号~10 号,可以计算:

$$V_{\text{avg}} = \frac{9 + 16 + 11 + 12 + 16 + 7 + 13 + 12 + 13 + 11}{10} = 12.0$$

表 3 可变移动平均周期的电机平均电值

电机	电机平均电压值	电机	电机平均电压值
1 号~10 号	12.0	19 号~31 号	7.5
11 号~18 号	10.0	32 号~40 号	12.6

这种使用单个电压值的方法有时候会得出与斜率方法稍有差异的结果。这是因为使用一条直线段

GB/T 17989.4—2020

贯穿代替一系列单个数据点,使数据的局部变化平滑。

## 6.7 曼哈顿图

在建立电压水平变点的估计,并得到它们的值以后,采用原来的纵向刻度表示实际电压值可以进一步简化和加强该表示方法,经常发现可以方便地按照“无噪声”数据方式进行数据外推。该方法受到曼哈顿直线轮廓的启发,因此被称为曼哈顿图。

与以电机生产顺序绘制的电压常规图类似,6.6.3 中的 a)、b)、c)和 d)所展示的只是结果的一种表示方法。作为与图 1c)中累积和数据 and 图 1a)中原始噪声数据的对比,其结果如图 3 所示。

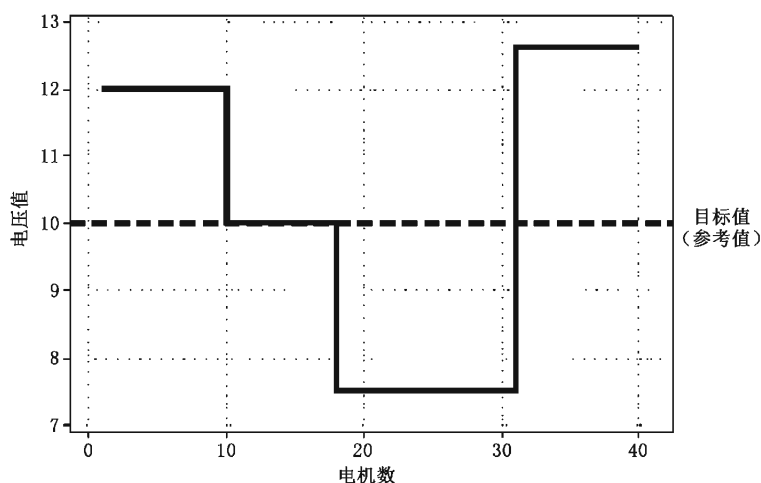


图 3 电机数据的曼哈顿图

在图 3 中,通过过程性能的回顾性分析,以调查的方式概括了累积和方法的作用和价值。它们用易于理解的语言和简单视觉增强方法,展示了累积和图的效果,没有引入或使用数学符号和正式的统计表达式。

由于曼哈顿图的简明特性,把累积和图作为中间技术阶段,并用曼哈顿图的形式简单展示数据,对便于广泛的非技术交流、理解和应用,有时会有很大帮助。

## 7 基于累积和的判定

### 7.1 判定准则的需求

判定准则可能需要用于累积和图解释的合理化。当满足某项适用的判定准则时,根据过程性质采取某项措施。典型的措施有:

- a) 对于过程控制,调整工艺条件;
- b) 在过程改进中,进行变化深层次原因的调查;
- c) 在预测模式中,分析预测模型,并在必要时调整预测模型或模型参数。

### 7.2 判定基础

建立基本准则,显然是作出决策的一个必要前提。

为了给检测信号提供有效的基础,需要对系统的“噪声”进行适当的量化测量。什么代表噪声与什么代表信号,由采取的监控策略决定,例如,进行多少次观测、采样频率,与样本或子组如何组成。另外,

量化变异的措施对该问题也有影响。

通常使用下述统计度量来测量固有变异：

a) 标准差：单个观测值是绘制累积和图的基础。

用于计算标准差的单个观测值，经常从过程数据的一个均匀段中抽取。然后，这变为进行判定的更苛刻标准。任何大于固有变异的变异都用来表示指示偏移的特殊原因，这里偏移可以是序列均值的偏移，可以是波动量级的变化，也可以兼而有之。

b) 标准误差：观测子组的某个函数构成累积和图绘制的基础，例如，均值、中位数或极差。

分组的概念是，组内变异是由组间产生变异的所有特殊原因共同组成的。那么，累积和图的主要作用是区分共同原因的变异和特殊原因的变异。因此，子组的选择至关重要。例如，在一个高速生产的过程中，每小时采集 4 个样本相继采样，与每秒钟采集 1 个样本、构成每小时采集 4 个样本，会带来非常不同的变异。与第二个示例相比，第一个示例的标准误差微不足道。一个累积和图会设置将连续部分的差异作为判定基础，而不是其每十五分钟的差异。潜在变异的合适度量依赖于需要检测信号的何种变化。

然而，为了建立可靠的量化测量，例如，标准差或标准误差，需要过程在足够长的一段时期内保持稳定性是必要的前提，这对累积和方法在一些潜在领域的应用是过于限制的。

例如，一个连续过程的观测可以在平均水平上表现出很小、且不重要的变异。需要针对这些变异，进行系统变化或持续变化的判断。示例如下：

a) 一个工业过程由恒温器或其他自动控制装置控制；

b) 输入的原材料质量会发生小的变异，但不会超出规范要求；

c) 在监测一个病人对治疗的反应时，病人可能会产生轻微的代谢变化，这与膳食、医院或家庭习惯等有关，但是治疗效果宜依据整体的典型变异进行判断。

另一方面，样本可以由来自多个来源（行政区、工厂、设备、操作人员）的输出或观测组成。因此，可能会有太多的局部变异，以至于不能为评估整体均值是否偏移提供现实基础。鉴于此，应谨慎对待来自不同来源组合的数据，因为不同分支来源的局部特性可能会被忽略。同时，随着时间的推移，不同来源之间的差异可能会掩盖整个系统发生的变化。

累积和程序的重要假设之一是过程标准差  $\sigma$  是稳定不变的。因此，在构建累积和之前，都要评估过程是否处于统计受控状态，可使用  $R$ -图、 $s$ -图或移动极差图，以便得到  $\sigma$  的一个可靠估计。

观测值间的序列相关性也能表明过程的稳定性，即一个观测可能对下一个观测产生一些影响。负序列相关性的一个例子是使用连续测量读数来估计散装物料的使用，一旦高估一个读数，就容易产生下一个读数的低估。另一个例子，在某个月里订货量过多，就会通过在下个月减少订货来补偿。在一些工业过程中，正相关性是有可能的，例如，在一批材料中，混合了之前批次和之后批次的材料。

预算和会计间隔节点、项目里程碑节点和合同期限会影响到连续经营数据的分配，例如，各时期的成本和销售等。

鉴于这些方面，有必要考虑序列或者数据序列中变异的其他定量测量以及它们适用的情形。

在定量意义上，附录 A 使用累积和，发展了基于其进行判定决策的一种变异测量。至于依据具体情形如何选择测量，也给出了建议。

### 7.3 判定准则的有效性度量

#### 7.3.1 基本概念

一个判定准则的理想表现是，对于至少一个预定大小实际变化的发生可以立即被检测到，而对于一

个没有发生实际变化的过程允许无限期持续进行、并且不产生误警。现实生活中,这是不可实现的。衡量判定准则实际效用的一个简单方便的度量是平均链长(ARL)。

ARL 是在作出发生了实际变化的判定之前,需要采集的样本数的期望值。

如果没有发生实际变化,ARL 的理想值是无穷大。在该情形下,一个实际的目标是使 ARL 很大。相反,当发生一个实际变化时,ARL 的理想值是 1;这时,采集下一个样本时就可以检测到该变化。ARL 的选择是对这两种矛盾需求的平衡。当过程没有变化时,作出错误决策而采取措施,就会导致“过控制”。实际上,这增加了变异。当过程发生改变,却没有采取适当措施,就会导致“欠控制”。事实上,这也会增加变异,同时导致生产费用增加。

当然,ARL 自身也是由统计变异决定的。有时会很幸运,长时间内没有发生误警,或很快检测到变化。偶尔也会很不幸,会产生误警或掩盖实际变化,导致在过程变化时没有产生信号。这种变化的实际模式值得时刻关注。然而,ARL 通常被视为判定准则有效性的一个合理度量,详见表 4。

表 4 累积和图判定准则有效性的 ARL 表现

真实过程情况	要求的累积和响应	理想响应
处于或接近目标值	长 ARL(很少误警)	ARL=无穷
远离目标值	短 ARL(快速检测)	ARL=1

### 7.3.2 平均链长计算示例

ARL 的概念并不是累积和专用的。对于标准的常规(休哈特)控制图,控制限设置为距离中心线正负 3 倍标准差。图 4 给出了常规控制图在正态分布下的描述。

对所展示的分是所谓的“标准化形式”,即具有零均值和单位标准差。

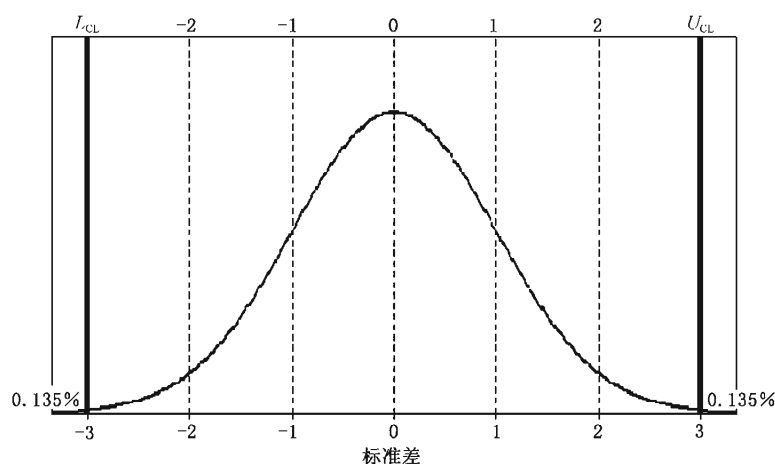


图 4 标准正态分布图

从图 4 可以看出,当过程的平均值处于中心线或目标值时,预期平均各有 0.135% 的观测值超出上、下控制限。通过计算  $1/0.001\ 35=741$ ,容易将其转化为平均链长(ARL)。换言之,可以预期,每 741 次观测平均有一个观测值超出上控制限。该值会触发水平变化的一个错误信号,而事实上,该变化并没有发生。

因此,实际中,需要设计一个控制系统,确保过程在目标值水平运行时具有高 ARL。

在考虑双侧控制限时,过程均值处于目标值时,ARL 值减半,其值为  $1/(0.001\ 35 + 0.001\ 35) = 370$ 。

假定过程均值向上控制限偏移 1 倍标准差。预期会有 2.28% 的观测值处于上控制限之上。那么,对该单边控制限,上控制限 (UCL) ARL 变为  $1/0.022\ 8 = 44$ 。换言之,对均值的 1 倍标准差偏移,每 44 次观测平均发出一个偏移信号。

在考虑双侧控制限时,当过程均值远离下控制限 (LCL) 4 倍标准差时,预期只有 0.003 2% 的观测值低于 LCL。正如  $1/(0.000\ 032 + 0.022\ 8)$  对单侧控制限 ARL 的计算没有实质影响,对于均值 1 倍标准差的偏移,双侧控制限的 ARL 与单侧控制限的 ARL 近似相等,即 44。

综上,得到如表 5 所示的结论。

表 5 随着均值相对于目标值的偏移,双侧控制限 ARL 与单侧控制限 ARL 的关系

均值处于目标值	双侧控制限 ARL 是单侧控制限 ARL 的一半
随着均值偏移的增加	双侧控制限 ARL 趋近于单侧控制限 ARL

当然,在实践中,像添加警戒限、均值以上和以下的链等其他报警准则,可以确保更快地检测到偏移,但代价是增加过程处于目标值时的虚警。常规控制图是非常有吸引力和流行的,因为它极其简单,而且在检测导致大偏移的单一特殊原因方面非常有效。

然而,要认识到,常规控制图对告警大偏移之外的情形存在固有限制,即使坚称不会严重损害误警程度。这表明需要有一种完全不同的方法,既能更快地检测到偏移,又能在过程处于目标值时保持长的平均链长。累积和方法就非常适合。

## 8 累积和图判定方案类型

### 8.1 V 型模板

使用累积和图的最简单判定准则体现在 V 型模板上。V 型模板有 4 种稍有不同模板类型,但它们的原理和作用相同。它们的目的后续阐述。它们是:

- 截顶 V 型模板;
- 半抛物线 V 型模板;
- 扁平鼻 V 型模板;
- 完全 V 型模板。

### 8.2 截顶 V 型模板

#### 8.2.1 结构和尺寸

图 5 介绍了一种通用截顶 V 型模板。它包括一个基点,在图中记为 O。从基点出发的两条垂线 OB 和 OC,其长度均为  $5\sigma_e$  (即  $H = 5\sigma_e$ )。这两条线被称为判定区间。两条倾斜臂 BA、CD 称为判定线,可以根据需要延长来覆盖所绘制的累积和点子。在尺寸上,EO 的长度等于 10 倍的观测区间,EA 和 ED 的垂直距离均为  $10\sigma_e$  (即,给一个  $F = 0.5\sigma_e$  的梯度)。

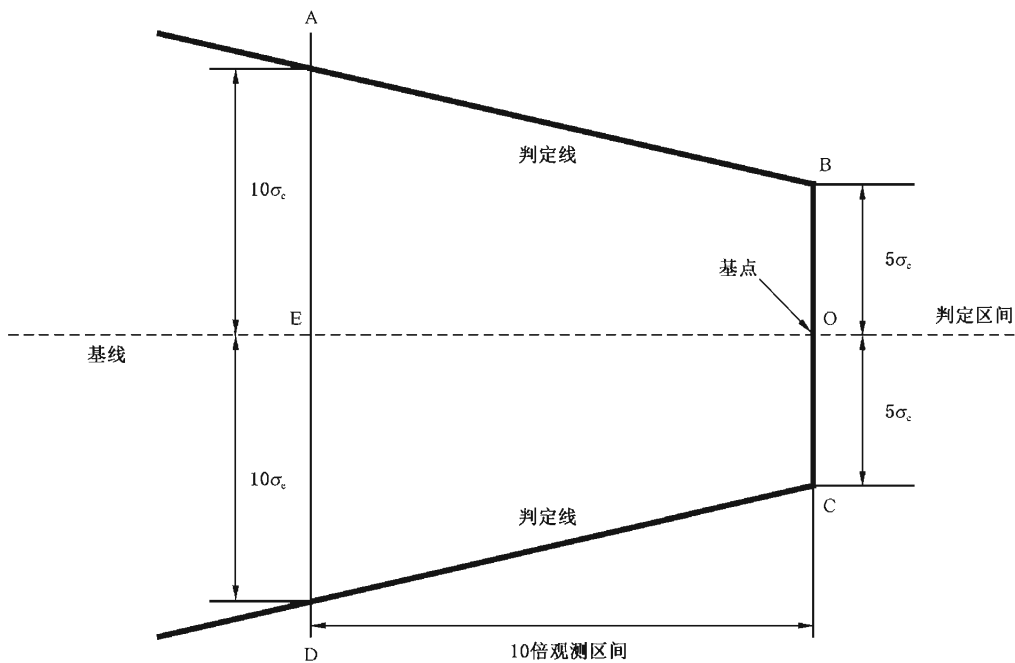


图 5 通用截顶 V 型模板的结构与尺寸

对标准差为 0.2 的过程变量,图 6 显示了一个实际尺寸的截顶 V 型模板。这里采用标准差,而不是标准误差,因为该专用模板是设计用来监控单个观测值的,而不是均值。

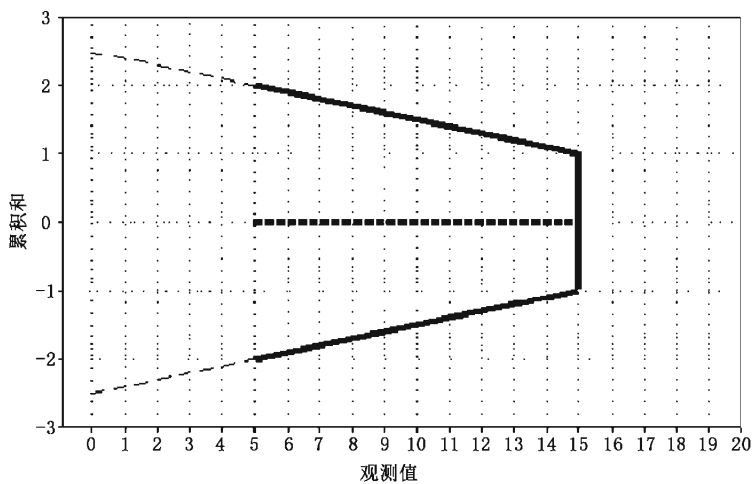


图 6 具有特定内在变异(标准差=0.2)过程特征的实际尺寸 V 型模板

### 8.2.2 截顶 V 型模板的应用

将基点置于累积和图的某个选定绘制值上,基线与控制图水平对齐。对于正在进行的监控过程,常常以最近的观测点作为选定绘制点。

如果累积和轨迹落在模板倾斜臂以内(或 A、D 的延长线之内),表示一直到该绘制值,过程均值没有发生显著偏移。对受控情形,则称该过程相对于目标值,处于统计受控状态。然而,如果累积和的轨迹游走到模板倾斜臂以外,则发出显著偏离目标值的信号。在过程管理中,则称该过程处于失控状态。

图 7 介绍了一个受控过程与两个失控过程。在受控过程中,没有检测出显著偏离目标值的偏移。两个失控过程,一个带有显著的向下偏移,另一个则显示显著的向上偏移。在图 7 的三种情形下,标准

差均为 0.2。构造累积和图的目标值等于该过程的目标均值。

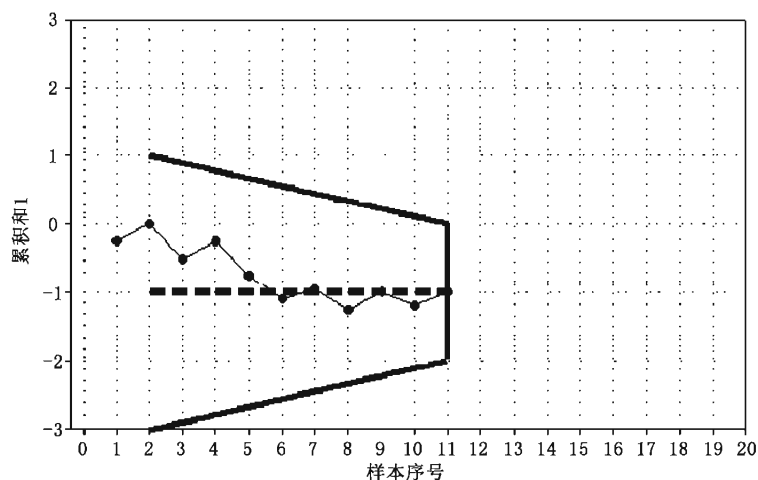
随着数据点的累积,在累积和图上逐步移动 V 型模板,作出当前状态的判定。

虽然图 7a)显示过程均值低于累积和目标值,但 V 型模板没有把该变化显示为一个显著偏移。

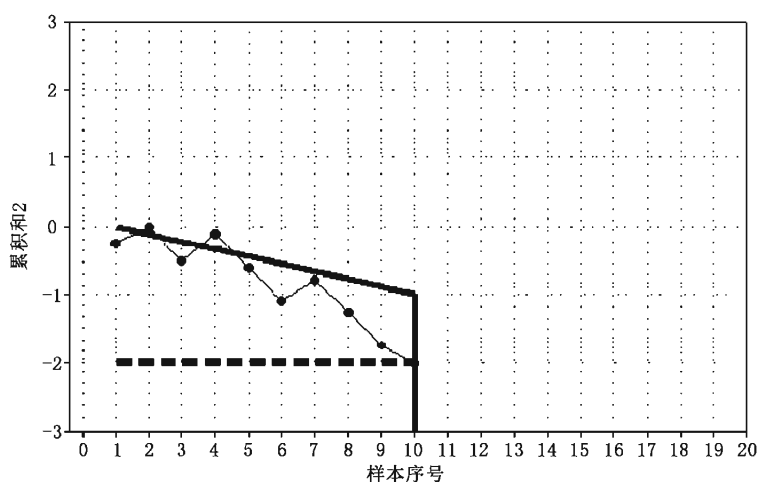
图 7b)表示过程均值显著低于目标值。直到第 10 个观测,这一显著偏移才被检测到,从视觉角度看,过程均值的向下偏移在第一个观测时就已经出现。通过记录穿过观测点直线的斜率,能够作出过程实际均值的评估。这不仅为过程恢复到目标值需要的校正幅度提供指南,而且对查明在第 1 个观测发生了什么,在过程最初将过程设置在这一低水平上,给出了一个诊断指标。

图 7c)表示过程均值显著高于目标值。直到第 14 个观测,这才被视为显著变化。从图中可以看出,直到第 6 个观测点,该过程一直低于目标值,但这不足以触发一个失控信号。接着,在第 6 个观测点以后,过程水平变到高于目标值的一个水平上。与起点数据一起,通过测量直到第 6 个观测的数据趋势线斜率和从第 6 个观测开始的数据趋势线斜率,既提供了一个校正工具,又给出了一个辅助诊断。

当仅适用上规格线或下规格线时,适用单侧控制图。此时,可使用“半 V 型模板”。当监控向上/下偏移时,分别只需要 V 型模板的下半部分/上半部分。然而,出于使用简便和信息完整性的考虑,最好使用完全 V 型模板。从规范的角度或从更为可取的方向上对重要移动进行直接关注,任何不相关方向上的变化都可以忽略。



a) 相对于累积和目标值,过程均值没有显著变化



b) 相对于累积和目标值,过程均值显著下降

图7 检测过程均值显著变化的截顶 V 型模板的使用介绍

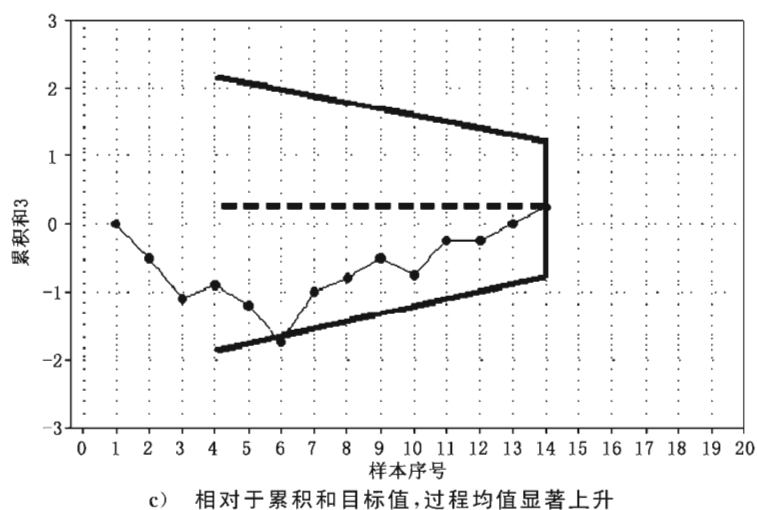


图 7 (续)

### 8.2.3 平均链长

根据绘制变量的标准差或标准误差,图 8 所给出尺寸的通用截顶 V 型模板之平均链长 (ARL) 的性质列于表 6 之中。将累积和 ARL 与控制图国际公认标准方法的两种判定准则进行对比。

这两种规则是:

- 休哈特准则 1: 有 1 个点距离中心线超出  $\pm 3$  倍标准差, 即行动限或控制限;
- 休哈特准则 2: 连续 2 个点距离中心线超出  $\pm 2$  倍标准差, 即警戒限。

注 1: 假定绘制变量服从标准差为  $\sigma$  的正态分布。

注 2: 这里, 平均链长是就均值的单侧控制图而言的。如采用单一目标值的双侧控制图, 在目标值处的 ARL 减半 (误警率将翻倍), 但对均值的大偏移, 其 ARL 不受影响。

注 3: 标准累积和是指  $h$  (判定区间高度) = 5.0、 $f$  (判定线斜率) = 0.5 的组合方案, 如图 5 所示。休哈特行动限只与休哈特准则相关。休哈特行动限和警戒限是休哈特准则 1 和休哈特准则 2 的组合应用。

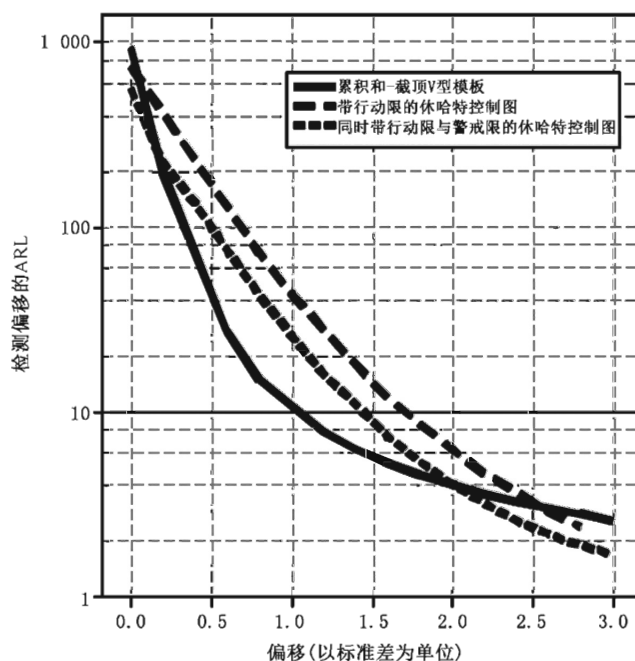


图 8 对通用截顶 V 型模板与休哈特控制图, 平均链长关于相对目标值偏移的变化曲线对比图

表 6 图 5 之通用截顶 V 型模板与两种准则下休哈特控制图,在不同偏移下的平均链长比较

过程均值对目标值的 偏移(以 $\sigma_e$ 为单位)	平均链长		
	标准截顶 V 型模板	带行动限的 休哈特控制图	同时带有行动限与警 戒限的休哈特控制图
0	931.0	741.0	556.0
0.2	198.0	308.0	223.0
0.4	60.0	200.0	134.0
0.6	27.0	120.0	75.0
0.8	15.0	72.0	43.0
1.0	10.0	44.0	26.0
1.2	7.8	28.0	16.0
1.4	6.3	18.0	11.0
1.6	5.3	12.0	7.4
1.8	4.6	8.7	5.4
2.0	4.0	6.3	4.1
2.2	3.6	4.7	3.2
2.4	3.3	3.7	2.6
2.6	3.0	2.9	2.2
2.8	2.8	2.4	1.9
3.0	2.6	2.0	1.7

平均运行链长是判定决策方法有效性的一个指标:

- 在目标值处, ARL 越大, 误警概率越低;
- 均值偏离目标值的 ARL 越小, 检测出该变化就越快。

从图 8 和表 6, 可以得出如下结论:

- a) 累积和控制图的受控平均链长  $L_0$  (零偏移的 ARL) 长于带行动限的休哈特控制图, 而同时带有行动限和警戒限的休哈特控制图的受控平均链长则远小于累积和控制图。因此, 在这三种控制图当中, 累积和控制图的误警率最低, 而同时带有行动限和警戒限的休哈特控制图的误警率最高。
- b) 对于多达  $2\sigma_e$  的偏移, 累积和图的 ARL 小于另外两种控制图, 表明累积和图对偏移的平均响应更快。对  $0.4\sigma_e \sim 1.4\sigma_e$  区间, 尤其如此。
- c) 对于超过  $2\sigma_e$  的偏移, 同时使用行动和警戒准则的常规控制图比累积和图的响应更快。对于超过  $2.4\sigma_e$  的偏移, 同时带有行动限和警戒限的常规控制图比累积和图的响应更快。然而, 常规控制图的快速响应是以更高的误警率为代价的。

#### 8.2.4 平均链长述评

首先, 通用、标准或截顶 V 型模板是专门适用于 1 倍标准误差 ( $1\sigma_e$ ) 大小的偏移设计的。如果关注其他大小的偏移, 则使用不同的  $h$  和  $f$ 。此外, 可以选用与截顶 V 型模板结构或形状不同的其他 V 型模板来改进 ARL 性质, 从而提高偏移检出效果。作为例子, 半抛物线 V 型模板与扁平鼻 V 型模板分别在 8.4 和 8.5 讨论。

其次,附加链长准则经常与休哈特控制图一起使用。包括“7个连续的点子同时出现在均值的一侧”与“7个连续绘制的间隔都是递增的或递减的”。这些准则的问题在于,它们显著减小了过程均值在目标值处的 ARL 值,因此,误警风险急剧增加。

第三,许多因素会影响 ARL 度量的稳健性。包括变异基本模式的形状、 $\sigma_e$  的值与观测值的独立性。表 6 和图 8 所展示的 ARL 表是基于如下 3 个假设的:

- a) 观测服从正态分布;
- b) 标准差确切已知;
- c) 相继观测是统计独立的。

正态分布是对称分布。一般,对单侧控制图,重尾偏态方向与潜在偏移的方向一致,会减小在目标值处的 ARL 值,但对均值大偏移情形的 ARL 几乎没有影响。反之,如果轻尾偏态方向与潜在偏移方向一致,在目标值处的 ARL 将大大增加,而对大偏移的 ARL 影响甚微。

标准差或标准偏差经常根据绘制累积和图使用的相同观测样本来估计。10%或更大的误差并不少见。高估  $\sigma_e$  会增加 ARL,而低估  $\sigma_e$  会减小 ARL。在目标值处或接近目标值处,ARL 的失真表现最为明显,但对大偏移,影响不大。表 7 给出了由于  $\sigma_e$  估计的 10%误差所导致的 ARL 失真情况。

正自相关倾向于减小 ARL,而负相关则增大 ARL。

表 7 标准差  $\sigma_e$  的不准确估计对 ARL 的影响

过程均值对目标值的偏移 (以 $\sigma_e$ 真值为单位)	平均链长 (ARL)		
	$\sigma_e$ 高估 10%	精确估计	$\sigma_e$ 低估 10%
0.0	3 000.0	930.0	410.0
0.5	45.0	38.0	35.0
1.0	10.0	10.5	10.0
1.5	6.0	5.8	6.0
2.0	4.4	4.1	4.5

宜注意,这里讨论的三种假设所带来的影响并不局限于累积和图,对其他控制图技术同样适用。

### 8.3 可替代的设计方法

为了在更广泛的均值偏移下,提高监控性能特征,一种替代设计方法是使用半抛物线 V 型模板(见 8.4)、扁平鼻 V 型模板(见 8.5)或快速初始响应(FIR)的累积和图(见 8.7)。

表 8 给出了标准截顶 V 型模板与上述替代设计方法的性能比较。

表 8 不同累积和模板的平均链长 (ARL)

均值相对目标值的偏移 (以 $\sigma_e$ 真值为单位)	截顶 V 型模板 ( $h=5; f=0.5$ )	半抛物线 V 型模板 (如表 9 所定义)	扁平鼻 V 型模板 ( $h=5; f=0.5$ 和 $h=2.05; f=1.3$ )	快速初始响应 截顶 V 型模板 ( $h=5; f=0.5$ )
0.00	465.0	235.0	300.0	446.0
0.25	142.0	113.0	114.0	125.0
0.50	38.0	36.0	36.0	29.0
1.00	10.0	10.0	10.0	6.4

表 8 (续)

均值相对目标值的偏移 (以 $\sigma_e$ 真值为单位)	截顶 V 型模板 ( $h=5; f=0.5$ )	半抛物线 V 型模板 (如表 9 所定义)	扁平鼻 V 型模板 ( $h=5; f=0.5$ 和 $h=2.05; f=1.3$ )	快速初始响应 截顶 V 型模板 ( $h=5; f=0.5$ )
1.50	5.8	5.3	5.3	3.4
2.00	4.0	3.3	3.3	2.4
2.50	3.1	2.3	2.3	1.9
3.00	2.6	1.7	1.8	1.5
3.50	2.2	1.4	1.5	1.3
4.00	2.0	1.2	1.3	1.2

#### 8.4 半抛物线 V 型模板

选择参数  $h=5$  和  $f=0.5$  的通用、标准或截顶 V 型模板。可以选择截顶 V 型模板  $h$  与  $f$  参数的不同取值,为特定大小的均值偏移提供快速响应。在其他情况下,如食品行业中,要求在提高均值大偏移的检测速度的同时,保持累积和在监控小偏移方面的优势,则需更换模板类型。

一种解决方法是半抛物线 V 型模板,在截顶 V 型模板的窄端处嵌入一个曲线轮廓,如图 9 所示。

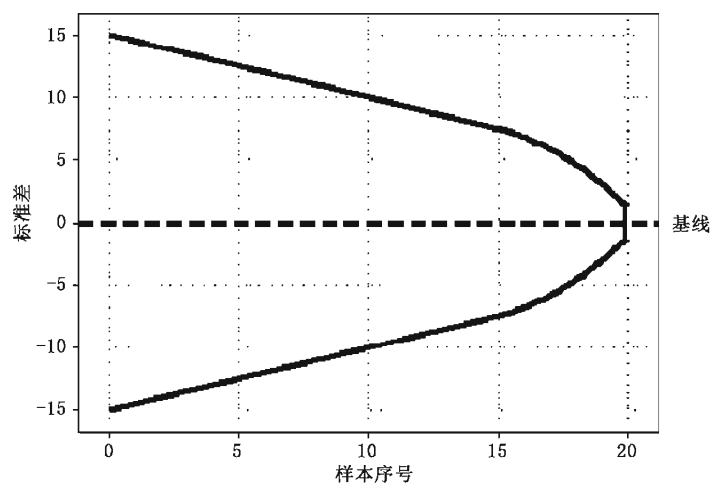


图 9 半抛物线 V 型模板的示意图

图 9 所示半抛物线 V 型模板的基础是图 5 的通用截顶 V 型模板。然而,在靠近窄端的 5 个观测区间,模板弯曲收窄到  $1.25\sigma_e$ ,而不是  $5\sigma_e$ 。构造该模板的数据在表 9 给出。

表 9 半抛物线式 V 型模板组成数据

与基点的距离 $J$ (观测区间 $J$ )	0	1	2	3	4	5	10	20
在 $J$ 处 V 型模板的半个宽度(以 $\sigma_e$ 为单位)	1.25	3.1	4.65	5.9	6.85	7.5	10	15
构造方法	$Y_J$ 处 V 型模板的半个宽度 $= 1.25 + 2.00J - 0.15J^2$						线性	

半抛物线 V 型模板的操作性能：

- 在均值偏移的整个范围内,半抛物线 V 型模板优于标准的零初始值截顶 V 型模板。然而,付出的代价是,在目标值处的误警率几乎翻倍。
- 从误警率和在 0.5 倍标准差以上的均值偏移报警两个方面来讲,半抛物线 V 型模板都不如标准的快速初始响应截顶 V 型模板。
- 从目标值处的误警率而言,半抛物线 V 型模板不如扁平鼻 V 型模板,而在均值偏移的检测方面,二者效果相当。

上述特点体现在表 8 中,在均值偏移方面,对不同的累积和判定准则,各自的平均链长 (ARL) 相当。

### 8.5 扁平鼻 V 型模板

扁平鼻 V 型模板意在实现与半抛物线 V 型模板相同的效果,而准备程序更为简单。因此,它在实际中是有用的,大偏移要求响应更快。这通过两个或两个以上截顶 V 型模板的叠加实现。图 10 所示的扁平鼻 V 型模板就是把  $h=2.05$  和  $f=1.5$  的截顶 V 型模板,叠加到  $h=5$  和  $f=0.5$  的标准截顶 V 型模板上得到的。表 8 说明,在广泛的偏移范围内,扁平鼻 V 型模板几乎与半抛物线 V 型模板具有同样好的监控效果,二者均优于标准截顶 V 型模板。

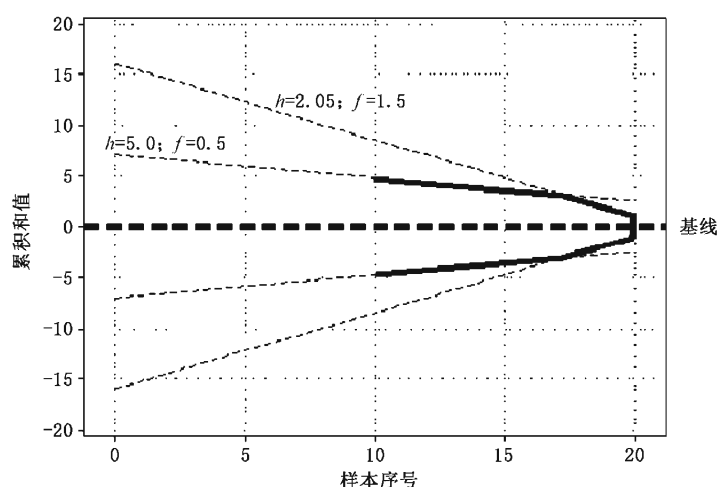


图 10 扁平鼻 V 型模板

### 8.6 完整 V 型模板

如图 11 所示,也可以根据完全 V 型模板,应用判定准则。该模板与截顶 V 型模板的性能特征完全相同,在此不再赘述。

图 11 表明判定线交于顶点 O。这意味着完全 V 型模板不再有基点,将顶点 O 置于累积和图上,使得感兴趣的最新观测点到顶点 O 之间有一段距离 OA。OA 称为前导距离  $d$ 。与已讨论的标准截顶 V 型模板相同,  $H=5\sigma_e$ ,  $d=10$  倍观测单位。

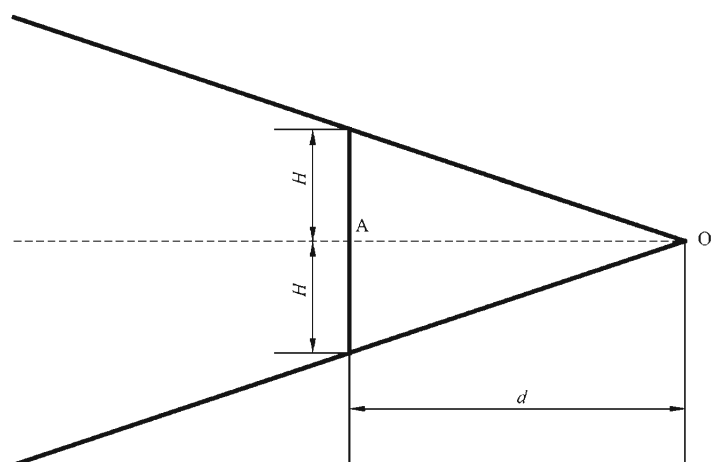


图 11 完全 V 型模板

### 8.7 考虑快速初始响应(FIR)的累积和图

快速初始响应(FIR)的累积和图旨在减小想要检测的均值偏移的平均链长(ARL),同时受控平均链长不会显著下降;这与相比较的普通判定准则有关。换言之,目标是在保持误警率几乎不变的条件下,对偏移的响应更快。

表 8 之第 2 列与第 5 列的 ARL 比较表明,在均值偏移的整个变动范围(在  $0.5\sigma_0$  偏移时,反应链长为 29,而不是 38;而在  $1\sigma_0$  偏移时,反应链长为 6.4,而不是 10)内,快速初始响应方案对均值偏移作出响应的速度更快,而相较于 465,同时保持一个相当的受控平均链长 448。

表 8 同时表明,与半抛物线 V 型模板和扁平鼻 V 型模板相比,快速初始响应方案对偏移的响应更快,同时,在受控平均链长(ARL=48)方面远优于半抛物线 V 型模板(ARL=235)和扁平鼻 V 型模板(ARL=300)。

使用快速初始响应,累积和不再从零开始累积,而是赋予累积和一个有利的初始值。方便起见,该初始值通常设置为判定区间的一半( $h/2$ )。

快速初始响应(FIR)累积和图的合理性在于,如果过程在监测之前或一开始便已经出现了偏移,那么,朝着数据波动的方向,半途开始累积和的累积过程,将加速均值偏移的信号。另一方面,如果过程没有发生偏移,该累积和图自然退化为零初始值的情形,与常见的零初始值累积和图的效果一致。

当与表格化累积和图(见 8.8)联合使用时,初始值需在上累积和和下累积和中同时使用。

## 8.8 表格化累积和图

### 8.8.1 理论基础

有时,累积和程序的主要目的,仅仅是为了检测非标准化情形,而不是为序列数据提供信息可视化展示。如果这样,完全可以通过表格形式记录累积和信息,作为累积和图的替代。因此,用一种数值判定准则代替常规累积和图所使用的模板。

上述方案称为表格化累积和。

V 型模板用倾斜臂检测偏移。V 型模板判定区间  $h\sigma_0$ 。允许累积和点具有一定的分散性。V 型模板判定线的斜率对应“目标值  $\pm f\sigma_0$ ”的过程平均水平。

## GB/T 17989.4—2020

采用表格化方案,代替累积与描点:

观测值—目标值

分别累积和制表:

观测值—(目标值+ $f\sigma_e$ )

对检测均值上升的上累积和,如果累积和值变为负值,则将累积和值重置为 0;并累积与制表:

观测值—(目标值— $f\sigma_e$ )

对检测均值下降的下累积和,如果累积和值变为正值,则将累积和值重置为 0。

这里,水平判定线设定在“ $\pm h\sigma_e$ ”,而不是 V 型模板中,由基线“ $h\sigma_e$ ”辐射确定的带有斜率“ $f\sigma_e$ ”的判定线。

从纯粹的统计决策而言,其效果恰好与相应的 V 型模板一致。

### 8.8.2 表格化累积和方法

对服从正态分布的测量数据特征,采用下述步骤建立和解释双侧累积和判定区间方案:

步骤 1 建立累积和参数:

- a) 建立判定区间  $h$ 。
- b) 建立判定线斜率  $f$ 。
- c) 设定目标值  $T$ 。
- d) 估计过程标准误差  $\sigma_e$ 。

步骤 2 计算累积和基准:

计算  $(T+f\sigma_e)$  与  $(T-f\sigma_e)$ 。

步骤 3 为检测均值水平上升的上表格化累积和,准备一张带有多列的累积和表:

- e) 观测数。
- f) 观测值。
- g) 观测值— $(T+f\sigma_e)$ 。
- h) [观测值— $(T+f\sigma_e)$ ]的累积和。

注:这是与常规的累积和图所用表相似的一张表,只不过用  $T+f\sigma_e$  代替  $T$ ,而  $f\sigma_e$  是等效 V 型模板判定线的斜率。

步骤 4 为检测均值水平下降的下表格化累积和,准备一张带有多列的累积和表:

除下述步骤之外,与步骤 3 相同:

- i) 观测值— $(T-f\sigma_e)$ 。
- j) [观测值— $(T-f\sigma_e)$ ]的累积和。

步骤 5 输入数据:

- k) 输入数据并计算。
- l) 对累积和的正值:初始值设为 0,对“[观测值— $(T+f\sigma_e)$ ]的累积和”的所在列累积求和。如果累积和在某一点变为负值,将其重置为 0,并从 0 继续累积求和,直到累积和再次变为正值。如果累积和触及或超出判定边界  $h\sigma_e$ ,则显示向上偏移。
- m) 对累积和的负值:初始值设为 0,对“[观测值— $(T-f\sigma_e)$ ]的累积和”的所在列累积求和。如果累积和在某一点变为正值,将其重置为 0,并从 0 继续累积求和,直到累积和再次变为负值。如果累积和触及或超出判定边界  $-h\sigma_e$ ,则显示向下偏移。

该方法的一个例子在表 10 给出,而表格化方法的另一个例子在附录 B 给出。

表 10 表格化累积和方案的例子

观测值	观测值－11	累积和(上)	观测值－9	累积和(下)	注释	
10	－1	0	＋1	0	累积和值为 0,过程均值在目标值处	
10	－1	0	＋1	0		
10	－1	0	＋1	0		
14	＋3	＋3	＋5	0	过程均值高于目标值,因此下累积和值为 0	
14	＋3	＋6	＋5	0		
3	－8	0	－6	－6		
3	－8	0	－6	－12 <sup>a</sup>		
10	－1	0	＋1	－11		
10	－1	0	＋1	－10		
10	－1	0	＋1	－9		
10	－1	0	＋1	－8		
10	－1	0	＋1	－7		
17	＋6	＋6	＋8	0		
17	＋6	＋12 <sup>b</sup>	＋8	0		
注 1: 目标值 = $T=10$ ; $\sigma_c=2$ ; $h=5$ ; $f=0.5$ 。						
注 2: 第 2 列 = 观测值 - $(T+f\sigma_c)$ = 观测值 - $(10+1)$ = 观测值 - 11。						
注 3: 第 3 列 = 观测值 - $(T-f\sigma_c)$ = 观测值 - $(10-1)$ = 观测值 - 9。						
<sup>a</sup> 过程均值下降报警。						
<sup>b</sup> 过程均值上升报警。						

## 9 过程和质量控制的累积和方法

### 9.1 拟检测变化的类型

#### 9.1.1 拟检测变化的大小

在设计监控工艺参数或者产品特征的累积和系统时,宜考虑重要检测参数或特征之偏移或变化的大小。该决策会影响用来观察失控信号的任一“V 型模板”的形状。在对过程参数或特征进行控制时,许多操作者依此作为过程可以纠正的最小偏移。几乎无法寻找比这更小的偏移,因为对累积和图的影响是有可能创造“摆动”现象(见 9.1.5)。

发生的变化可以分类为“阶跃”“漂移”或“循环”。

#### 9.1.2 阶跃变化

阶跃变化是指工艺参数或者产品特征测量数据的突跳或“阶跃”到一个新的水平。例如,当使用与先前批次存在某种差异的新批次原材料,或者缺乏经验的员工接管行政工作时,会比经验丰富人员犯更多错误,直到该员工正确掌握所需任务。累积和图会通过一个显著的梯度来识别该变化。详见附录 C。

#### 9.1.3 漂移

漂移变化通常与设备或工具的磨损方式有关,但也可以发生人因情形,标准随时间改变,例如,检测

GB/T 17989.4—2020

标准。该模式将被累积和图检测,并描绘为一个上升(或者下降)的梯度。

#### 9.1.4 循环

随着时间变化并且不断自我重复的一种模式,称为循环变化。例如,在一个工厂有三个工作班次,且所有三个班次的工人对同一任务的工作表现不同。因为有给定的班次顺序,例如 B 班总是排在 A 班之后,就会产生一个循环模式。累积和图显示该模式是周期性的,梯度从一个方向转到另一个方向,然后再变回先前的方向,依此下去。

#### 9.1.5 摆动

当参数或特征不能完全调整到期望目标值处,而且跟随失控信号、所作调整使参数或特征落在目标水平的另一侧时,就会发生摆动。因此,累积和图在相反方向上发展一个梯度,并最终作出逆转先前所作调整的信号。显然,这是最不令人满意的情形,并且宜通过谨慎选择初始目标值和随后寻求的最小调整来避免。消除摆动的更详细讨论见 9.3.1 之步骤 13c)。

### 9.2 目标值的选择

#### 9.2.1 通则

在建立累积和方案时,目标值的正确选择至关重要。

介于两个可能值之间的目标值会产生如 9.1.5 中所述的“摆动”现象。

#### 9.2.2 作为目标值的标准(给定)值

最简单的目标值分配是“给定”或“事先分配”。在采用该方式时,目标值经常设置等于某些规范值,例如标称值或公差中间值。它们源于工程中应用的规范文件或图纸。如果累积和图应用于非制造业,给定目标值可能是某些性能水平,例如,一个公司某部门中处理一张发票的预期时间或者每月预算支出。

目标值本身可能发生变化。例如,使用累积和图按月监控冰淇淋销量,根据一年中时间的变化,各个月份的目标值很可能不同。可以预计夏季月份比冬季月份销售更多的冰淇淋,因此各个月份可以采用不同的目标值。如果没有认清该销售模式,而采用每月恒定的目标值,将在累积和图纸上产生一个误导结果的图形。累积和值很可能在一年内的某个时期上升,而后另一个时期下降。如果目标值是变化的,累积和控制图将会排除“季节性”干扰,更好地显示冰淇淋销售量是否存在显著变化。

目标值选取不当会导致 9.1.5 所述的“摆动”现象,因此,在选择该类目标值时,宜谨慎考虑。

当监控存在问题的参数或特征的均值或平均水平(位置)时,规范是采用给定值的方法。尽管同样的方法可以用于监测波动(散度),例如子组标准差或极差,但本部分并不建议这样做。最好使用蕴含在 9.2.3 及后续章节中的指南来处理。

#### 9.2.3 基于性能的目标

目标值可以根据当前的性能水平设置。该方法与基于性能的控制图兼容,控制限可以根据工艺参数或产品特征的最近历史表现来设置。

对位置或散度的监控,在试验阶段或数据收集阶段,采集数据是不可缺少的。为充分观测固有变异,该阶段宜足够长,并且这是一个需要判断决策的问题。通常,试验阶段宜足够长,保证累积和图可以绘制 25 个点子。宜根据这些数据,作出均值和标准差的估计。

一旦确定,宜使用这些目标值计算累积和,但如果累积和图显示水平发生变化,可在随后时间要求改变目标值。如果跟随这一变化,不可能做任何过程调整,或者新的水平是可以接受的,可采取的唯一措施就是修改目标值。这通常发生在评估新水平如何由最新数据确定、且使之作为新目标值的时候。此后,累积和图将参照新的目标值,监控参数或特征。

### 9.3 位置监控的累积和图设计方案

#### 9.3.1 标准方案

建立累积和控制图的具体流程,见图 12。

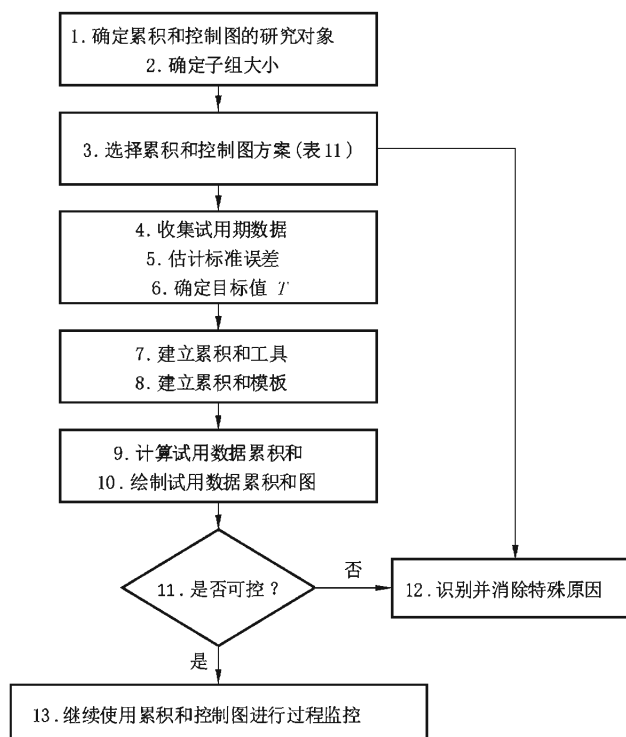


图 12 累积和控制图建立流程

##### 步骤 1 确定累积和控制图的研究对象

确定需要监控的工艺参数或产品特征。

注 1: 这可以是来自客户的指令、关键工艺参数或者显著的产品特征。也可以在解决问题的过程中,确认研究对象。

##### 步骤 2 确定子组大小

累积和图合理子组的确定方法与构造常规控制图的思维过程完全相同。

如果以工艺参数作为选定的累积和监控对象,最合适的子组大小通常为 1。这是因为参数(例如,溶液温度或容器压力)在短时间内不会发生变化。采取多个连续重复测量时,一个测量和后一个测量之间不可能显示任何测量差异。这会给标准差的确定与累积和模板的正确设置带来技术问题。

如果数据确实是一次只有一个,例如,某特定月份的销售量,则合理子组大小为 1。

当选定一个产品特征时,合理子组大小经常大于 1,通常设定为 5。这里,应该考虑和使用常识。因此,选择子组大小来表示过程的随机变化。

##### 步骤 3 选择累积和控制图方案

表 11 列出了对应一系列典型要求,为累积和控制图提供的一套标准方案。本表提供了两种基本方案,一种方案在零偏移时的平均链长稍长,即 CS1 方案,另一种方案的平均链长较短,即 CS2 方案。换言之,CS2 方案比 CS1 方案能更快地检测出过程水平偏移,但代价是发出更多虚警信号。

无论谁负责方案的选择,都要确定哪一个场景最重要,并由此选择合适的方案。表 12 介绍了这些标准方案的性能差异。

表 11 关于子组均值的标准累积和方案

拟检测的均值重要偏移 <sup>a</sup>	CS1 方案		CS2 方案	
	$h$	$f$	$h$	$f$
1) $<0.75\sigma_e$	8.0	0.25	5.0	0.25
2) $0.75\sim 1.50\sigma_e$	5.0	0.50	3.5	0.50
3) $>1.50\sigma_e$	2.5	1.00	1.8	1.00
注 1: 在实际偏移为 0 时,CS1 方案给出的平均链长 $L_0$ 介于 700~1 000。				
注 2: 在实际偏移为 0 时,CS2 方案给出的平均链长 $L_0$ 介于 140~200。				
<sup>a</sup> 对单个观测(子组大小=1), $\sigma_e$ 表示标准差。当子组大小大于 1 时, $\sigma_e$ 表示均值的标准误差。				

一旦选定 CS1 方案或 CS2 方案,下一个是重要偏移大小的确定。表 12 提供了三种典型的偏移水平。根据拟检测的均值偏移, $h$  和  $f$  的值可以从表 11 中读出。

在不清楚应选择哪一方案时,惯例和实践表明:一个好的初始方案是选择 CS1 方案之 2),即  $h=5.0$  和  $f=0.5$ 。

表 12 关于子组均值标准累积和方案的性能比较

均值相对目标值的偏移 (以 $\sigma_e$ 为单位) <sup>a</sup>	CS1 方案			CS2 方案		
	(i)	(ii)	(iii)	(i)	(ii)	(iii)
0.00	730.0	930.0	715.0	140.0	200.0	170.0
0.75	16.4	17.0	27.0	10.5	11.5	15.0
1.00	11.4	10.5	13.4	7.4	7.4	8.8
1.50	7.1	5.8	5.4	4.7	4.3	4.0
注:表格数值为平均链长。读者宜知道,检测一个实际偏移的实际链长是会变化的,可能短于、也可能长于平均链长(ARL)。在对此特别感兴趣时,读者宜检查相对目标值特定偏移的链长分布,了解可能经历的链长期望范围。						
<sup>a</sup> 对单个观测(子组大小=1), $\sigma_e$ 表示标准差。当子组大小大于 1 时, $\sigma_e$ 表示均值的标准误差。						

不论选择哪种方案,这些参数的值都宜乘以估计波动  $\sigma$ (或  $\sigma_e$ )来确定模板的实际尺寸和形状。这在步骤 8 中描述。

#### 步骤 4 收集试用期数据

如本条中所示,宜收集描述过程变异特点的数据,因此,在必要情况下,应适当调整累积和方案,协助获得目标值。

确定一个试用期,期间会观察过程变化的所有来源。因此,需在试验时间足够长,或采样频率足够高,以保证产生至少 25 个子组数据。

注意在该阶段不要引入额外的变异来源(例如,过程调整),因为这会歪曲变异方式。如果数据采集出现中断,就需要判断试用期试验是否需要重做,或者在该缩短的试用期内、是否产生了足够的数据。通常,如果子组数目达到 20 及以上,并判断所有潜在的变异来源在这 20 个子组内都已经观测,则该子组数目满足要求,试用期结束。然后,宜根据试用期的数据建立变异水平,累积和方案将在该水平下实施。这在步骤 5 和步骤 6 中描述。

#### 步骤 5 估计标准误差 $\sigma_e$

方法如下:

a) 通则:

以下段落概括了估计  $\sigma_e$  的方法。可能发生要求使用不同方法的特殊情况。可以通过考察子组均值的标准差来估计  $\sigma_e$ 。

b) 子组大小大于 1 ( $n > 1$ ):

i) 计算每个子组极差;

ii) 计算所有子组极差的平均极差  $\bar{R}$ ;

iii) 对平均极差除以取自表 13 的适当  $d_2$  值, 来估计子组标准差  $\sigma_0$ ;

iv) 通过  $\sigma_0$  除以子组大小的均方根, 来估计标准误差  $\sigma_e$ , 即:  $\sigma_e = \sigma_0 / \sqrt{n}$ 。

表 13 根据子组极差估计子组标准差的系数  $d_2$

子组大小 $n^a$	$d_2$	子组大小 $n^a$	$d_2$
2	1.128	7	2.704
3	1.693	8	2.847
4	2.059	9	2.970
5	2.326	19	3.078
6	2.534		
注: 在子组大小超过 10 时, 使用其他方法估计子组标准差会更有效。			
<sup>a</sup> 当 $n > 10$ 时, $d_2$ 值存在。可参照 GB/T 17989.2 或其他教科书或标准。			

子组标准差( $s$ )方法能够用作子组极差的代替。计算平均子组标准差  $\bar{s}$  来代替  $\bar{R}$ , 而  $\sigma_0$  由  $\bar{s}/c_4$  估计。 $c_4$  的值见表 20。

c) 子组大小为 1 ( $n = 1$ )

估计  $\sigma_e$  采用连续差分方法, 有时也称为两观测值的移动极差。

将试用期内收集的数据宜按照采集顺序排列。宜计算第一个和第二个结果之间的极差, 然后是第二个和第三个之间的极差, 依次类推。如果有  $k$  个子组, 会得到  $k-1$  极差。计算这些极差的平均值  $\bar{R}$ 。

$\sigma_e$  的估计可通过平均极差  $\bar{R}$  除以 1.128 得到。

步骤 6 确定目标值  $T$

如 9.2 所述, 目标值可以是给定值, 也可以是由数据确定的基于性能的值:

a) 给定值

目标值是一个特定值。在研究产品的性能时, 它可能来自一个规范文档或图纸; 就产品特征而言, 它可能是一个标称量; 对非制造过程而言, 它可能是由管理部门给定的一些期望的性能水平。

b) 基于性能的值

这里, 目标值宜根据试用期内收集的数据确定:

i) 计算每个子组均值( $\bar{x}$ );

ii) 计算这些均值的平均( $\bar{\bar{x}}$ );

iii) 指定  $\bar{\bar{x}}$  作为目标值  $T$ 。

步骤 7 建立累积和工具

方法如下:

a) 通则

第 5 章提供了建立累积和工具的指南。

b) 累积和表

建立一个合适的表格, 累积和计算值可以填写在该表中, 也可以从该表读出。这样一个表的一部分如表 14 所示。

GB/T 17989.4—2020

如果子组大小为 1,则用单值  $x$  代替  $\bar{x}$ ,并将单值  $x$  填入表中;

表 14 累积和计算列表

子组号	$\bar{x}$	$\bar{x} - T$	累积和值 $C$

c) 累积和图坐标纸

选择网格宽度适当的坐标纸。该选择会受到纸张目的用途的影响,例如,贴在墙上或公开展示。  
选择一个合适的刻度。该刻度受到图所在位置的影响。例如,对于贴在墙上或公开展示的图纸,横坐标上组数目之间的间隔可以定为 10 mm,而对于只放在桌子上用的图纸,间隔可以是 5 mm。

累积和( $C$ )轴的单位间隔,由选定的横坐标近似等于  $2\sigma_c$  的相同间隔得到,可适当舍入。该刻度不大可能人为平滑一个显著趋势或夸大一个微不足道的变化。

选取累积和轴的中心点为 0 点,并从该点出发,画一条穿过坐标纸的粗体水平线。在坐标纸上,划线标明垂直的累积和刻度。

这类坐标纸的一个例子,如图 13 所示。

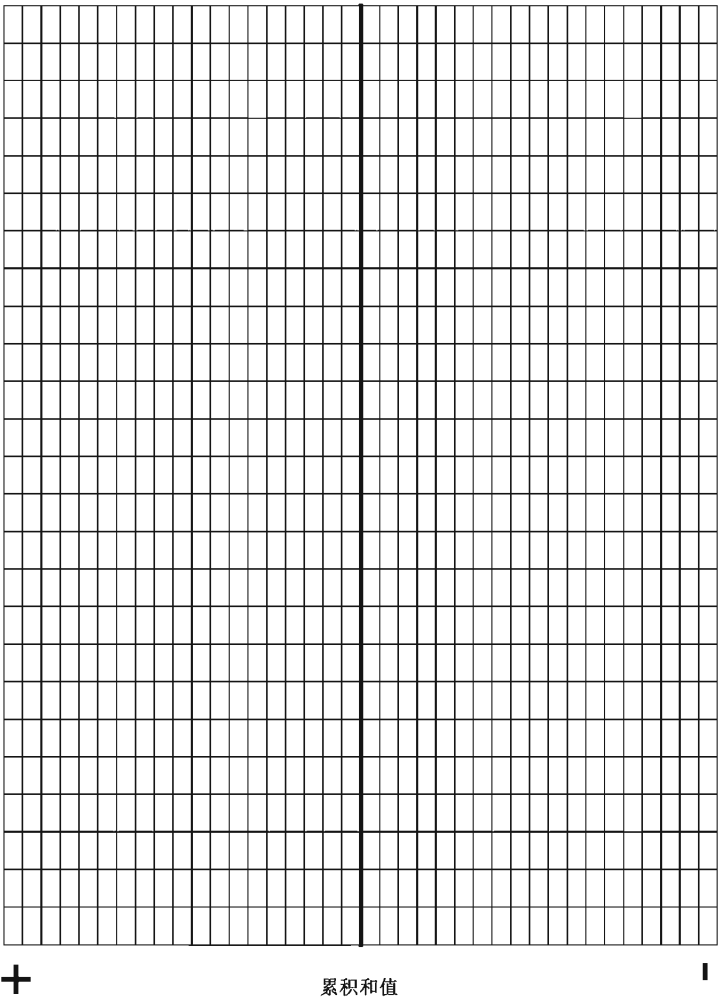


图 13 累积和坐标纸示例

## 步骤 8 建立累积和模板

8.2.1 描述了标准累积和模板的几何形状,图 5 介绍了模板的组成和如何标注刻度。而  $h$ 、 $f$  和  $\sigma_e$  的值宜由本条介绍的方法确定:

- a) 计算  $H = h\sigma_e$ ;
- b) 计算  $F = f\sigma_e$ 。

宜根据为累积和纸选定的刻度来绘制模板。这对于正确使用模板,对是否发生预设大小的变化作出判定是至关重要的。

注 2: 一些模板是用透明材料制作的,例如,醋酸纤维。该模板轮廓能使用抹不掉的墨水勾勒。有时,模板可以从一张卡片上剪出来,再与  $H$  和  $F$  值一起,用累积和纸的刻度标出。

注 3: 已有计算机程序可以显示模板绘制于其上的累积和图形,所有均可自动放缩。

## 步骤 9 计算试用数据累积和

利用步骤 6 确定的目标值和类似于表 14 的表格,计算试用数据的累积和值。

## 步骤 10 绘制试用数据累积和图

上述产生的表格化累积和值应绘制到与图 13 类似、合适的坐标纸上,从左向右绘制。连接所有绘制点,使任何趋势更容易看到,随后在模板叠加到累积和图上时,这有助于识别失控点。

## 步骤 11 检查试用数据累积和图是否发生失控

将模板叠加到累积和图上。

具体来说,就是将如图 7a)所示的“前导点”定位于最后绘制的累积和值,注意保持模板中心线与纸面零轴平行,以保证模板的正确定位。

只要出现数据点超出模板的倾斜臂(判定线)的情况,就表示出现一个过程失控,即使超出的点不是最后一个绘制点,甚至在它之后的绘制点返回模板倾斜臂以内,如图 7b)所示。

## 步骤 12 识别并消除特殊原因

方法如下:

### a) 通则

有必要考察累积和图上的任一失控点,并识别导致失控的特殊原因。

### b) 识别特殊原因并防止复发

一旦识别出特殊原因,就采取措施防止其未来复发,目标值和标准误差(或标准差)的取值可能需要修订。如果只观测到一个失控点,且其原因已圆满处理,则先前指派的目标值和标准误差(或标准差)值,可根据剔除失控子组数据后的原始试用数据进行修正。修正累积和坐标纸的刻度计算和模板的几何尺寸,并根据需要,重新标注坐标纸和模板刻度。

如果试用数据中出现多个失控点,就表明该过程存在更多问题,建议对该过程进行审查、校正之后,启动一个全新的试用期,并根据所得到新数据,重新建立新的累积和图。

### c) 识别特殊原因,但不阻止其复发

出于经济或技术考虑,有时特殊原因是不能预防的。

在这类情况下,累积和图参数根据所有的试用数据确定,并使用其继续进行监控。换言之,这些特殊原因被看作是过程随机波动的一部分。

### d) 未能识别的特殊原因

一些特殊原因可能仍然无法识别。这总是很不理想的,因为它会阻止过程改进。宜尽各种努力去调查特殊原因,并使用其他统计方法和问题解决技巧。统计试验设计等技术在这方面特别有效。

如果特殊原因依然无法识别,则采取上述 c) 中的措施。

## 步骤 13 继续使用累积和控制图进行过程监控

方法如下:

### a) 通则

如果试用数据提供了一个受控情形,或者特殊原因圆满处理后收集了新数据,则累积和控制图可以进行工艺参数或产品特征的持续监控。坐标纸刻度、模板参数和模板刻度,现在可以用来监控将来的子组数据。

如果将来出现失控信号,要及时调查,并确定对过程采取何种措施。这些措施可以是包括工具等的过程调整,或者在过程水平变好时,设置新的目标值。

#### b) 过程调整

根据累积和图,确定调整的大小:

- i) 确定最后一个绘制点的累积和值。
- ii) 确定超出模板行动臂的累积和图所在位置的累积和值。对多次超出的情形,选择最近的,即选择离模板前导点位置最近的失控点。
- iii) 计算两点之间的累积和差值。
- iv) 统计前导点和失控点之间绘制的点子个数。
- v) 将步骤 iii) 计算的累积和差值除以步骤 iv) 统计的绘制点子个数,计算累积和图的一个局部梯度。这就是过程相对目标值偏移的一个估计。
- vi) 对过程进行相同大小的调整。在累积和图上记录所进行的变化。
- vii) 将累积和值重置为零,并继续进行监测。

注 4: 只要可能,尽量根据模板的几何特征与累积和纸,生成“查询”图,从而读出相对目标值的偏移量,而不是按照这里的描述进行计算。示例如图 14 所示。

#### c) 过程调整-抗摆动

“摆动”的概念在 9.1.5 中已给出。累积和方法的应用表明:当按照计算得到的相对目标值的偏移 100% 调整过程时,会引发摆动现象。按照这一调整,后续的累积和显示需要进一步向反方向进行调整,即如同之前的调整过大。如果过程按照最新指示的偏移量调整回去,以后可能需要在反方向上进行更多的调整。这种现象称为“摆动”。

这是由于短期累积和梯度,夸大了由模板设计修正可以治愈的实际偏移,或者需要的实际过程调整难以实现引起的。

一个切实可行的解决办法是使过程调整低于 100% 的隐含偏移。该缩小百分比被称为“抗摆动因子”。它降低了累积和图出现“摆动”的可能性。习惯与实践结合,一些研究表明:“抗摆动因子”等于 75% 时效果非常好。因此建议,至少在初始阶段,设定调整量为计算所得偏移的 75%。

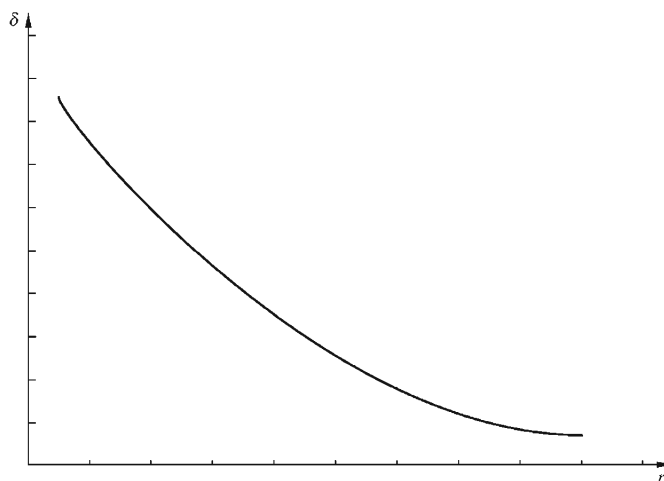


图 14 相对目标偏移查询图的示例

如图 14 中所示的查询图可以用一种结合抗摆动因子的方式绘制。如果有很多人参与操作累积和

系统,则值得使用该方法。

另外一种抗摆动因子为  $r/r+1$ , 其中,  $r$  表示前导点与失控点之间的点子数。使用该因子, 过程调整量  $\varphi$  的计算见式(3)。

$$\varphi = \frac{C_r}{r+1} \quad \dots\dots\dots (3)$$

式中:

$C_r$ ——前导点与失控点之间累积和值的差。

当发生阶跃变化时, 该方法对阻止摆动产生具有良好效果。

### 9.3.2 标准方案——局限

9.3.1 所述的基本累积和方案为多数应用提供了一个良好的起始位置, 并在许多情形下不需要任何改进。但对一些应用, 注意在一段时间后, 选定的基本方案可能需要改进, 因为要检测一个重要大小偏移的平均链长 (ARL) 太长, 或者误警频率太高。

### 9.3.3 特定累积和方案

注: 特定累积和方案的设计要求具有比 9.3.1 描述的基本方案更多的知识和输入。需要累积和方案的每个人渴望咨询专家来帮助设计。

累积和方案的制定步骤如下:

- 确定拟检测的、相对目标值的(重要)偏移的大小,  $\delta$ ;
- 如前所述, 估计标准误差  $\sigma_e$ , (在子组大小为 1 时, 使用标准差代替);
- 当偏移具有 9.3.1 之步骤 3 给定的大小  $L_\delta$  时, 指定预期的 ARL;
- 当偏移为 0 时, 指定预期的 ARL, 即确定误警率  $L_0$ ;
- 计算标准化偏移  $\Delta = \delta / \sigma_e$ ;
- 为了  $\Delta$  的计算值, 并考虑  $L_\delta$  和  $L_0$  的取值, 从图 15 中读出  $h$ ;
- $f$  的值也可以根据  $\Delta$  的计算值从图 15 中读出;
- 根据前面得到的  $h$  和  $f$  的新值, 调整累积和模板。

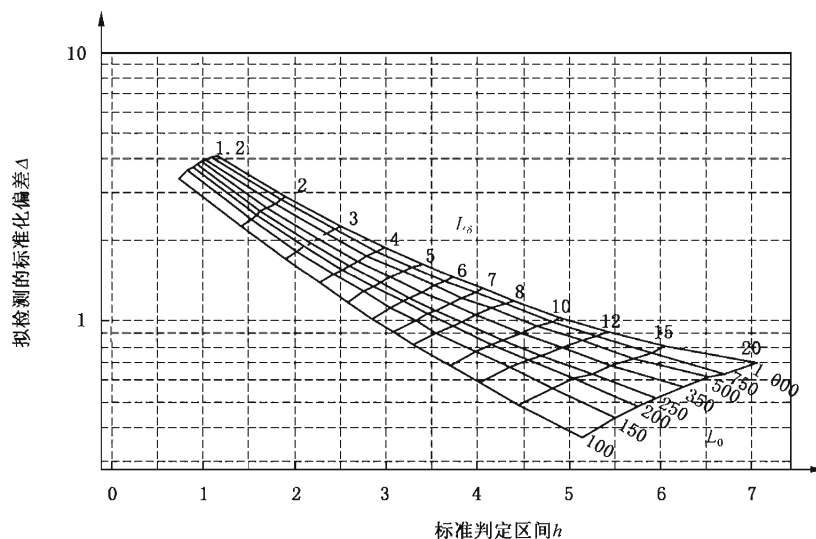


图 15 模板参数截面图

## 9.4 波动监控的累积和图设计方案

### 9.4.1 通则

除了监控过程位置,有必要监控过程波动,在大部分情况下,这将是短期波动。

两种最适合的波动度量是子组极差和子组标准差。至于选用哪一个,宜作出一个选择。其决策依赖于计算的难易程度和涉及计算部分解决措施的理解水平。许多参与操作控制图的,选择极差作为首选度量,因为它容易计算、内涵简单,并且对经常选择的子组大小(例如,5个样本),极差的效率几乎与标准差一样好。

如果子组大小为1,采用的度量宜为相继样本结果之间的极差。

### 9.4.2 子组极差累积和方案

宜按照下述步骤,使用子组极差,建立一个监控过程波动的适用方案。其中一些步骤,会与监控均值的累积和方案完全相同。

步骤1 确定累积和图的监控对象

参照9.3.1之步骤1。

步骤2 确定子组大小

参照9.3.2之步骤2。

步骤3 选择极差累积和方案

表15为极差累积和方案的典型要求,明确提出了一套标准方案。如9.3.1所述,本表提供了两种基本方案,一种方案是在期望波动水平下的平均链长(ARLs)较长,即CS1方案,而另一种方案的平均链长较短,即CS2方案。CS2方案检测过程水平偏移比相应的CS1方案更快,但代价是发出更多虚警信号。表16介绍了这些标准方案的性能差异。

表 15 子组极差标准累积和图方案

子组大小	CS1 方案		CS2 方案	
	$h$	$f$	$h$	$f$
2	2.50	0.85	2.50	0.55
3	1.75	0.55	1.75	0.35
4	1.25	0.50	1.25	0.30
5	1.00	0.45	1.00	0.30
6	0.85	0.45	0.85	0.30
7	0.70	0.45	0.70	0.30
8	0.55	0.40	0.55	0.25
9	0.55	0.40	0.55	0.25
10	0.50	0.35	0.50	0.25
注1:当过程在期望波动水平运行时,CS1方案给出的平均链长 $L_0$ 介于600~1 000。				
注2:当过程在期望波动水平运行时,CS2方案给出的平均链长 $L_0$ 介于150~210。				

选择CS1方案和CS2方案其中之一。宜采用与子组均值方案选择相同的选择准则。当没有变化发生时,如果需要一个较长的ARL,选择CS1方案;否则,选择CS2方案。

无论选择哪一种方案,这些参数值都宜乘以波动估计 $\bar{R}$ ,来确定模板的实际尺寸和形状。这在步骤8中描述。

## 步骤 4 收集试用期数据

对位置的技术指导在这里同样适用。

步骤 5 根据试用期数据估计  $\bar{R}$ 

使用 9.3.1 之步骤 5 的方法,计算  $\bar{R}$ 。

步骤 6 确定目标值  $T$ 

方法如下:

## a) 给定值

在统计质量或过程控制中,设定目标极差的最常用方法,如后续 b)所述。然而,在有些场合下,可以根据一些假定的水平,优选目标值。如果这样,目标极差设定为极差的一个给定值。

如使用标准差来描述波动,目标极差可以按照式(4)计算。

$$T = d_2 \sigma \quad \dots\dots\dots (4)$$

式中:

$d_2$  可以查阅表 13,其值依赖于所选用子组的大小。

表 16 子组极差标准累积和方案性能(ARL)比较

子组大小	实际过程波动水平	CS1 方案	CS2 方案
2	$\bar{R}$	779.0	170.0
	$2\bar{R}$	7.2	5.5
	$4\bar{R}$	2.3	2.1
3	$\bar{R}$	893.0	196.0
	$2\bar{R}$	4.5	3.6
	$4\bar{R}$	1.6	1.5
4	$\bar{R}$	918.0	157.0
	$2\bar{R}$	3.3	2.7
	$4\bar{R}$	1.3	1.2
5	$\bar{R}$	771.0	179.0
	$2\bar{R}$	2.7	2.3
	$4\bar{R}$	1.2	1.1
6	$\bar{R}$	942.0	204.0
	$2\bar{R}$	2.4	2.0
	$4\bar{R}$	1.1	1.1
8	$\bar{R}$	893.0	162.0
	$2\bar{R}$	2.0	1.7
	$4\bar{R}$	1.0	1.0
10	$\bar{R}$	635.0	184.0
	$2\bar{R}$	1.7	1.5
	$4\bar{R}$	1.0	1.0

注:表格数值为平均链长(ARLs)。读者宜知道,检测一个实际变化的实际链长是会变化的,可能短于、也可能长于平均链长(ARL)。在对此特别感兴趣时,读者宜检查相对目标值特定偏移的链长分布,来了解可能经历的链长期望范围。

GB/T 17989.4—2020

## b) 基于性能的值

根据试用期获得的数据,设置目标极差等于  $\bar{R}$ 。

## 步骤 7 建立累积和工具

如 9.3.1 之步骤 7 所述,建立一个累积和表(或添加到已有的累积和表中),并发展累积和坐标纸。

绘制极差累积和的累积和坐标纸可能需要一个与监控过程均值不同的刻度。合适的刻度,可以利用下面的计算,上下修约至最近的适当值来得到。

极差的累积和刻度间隔是  $a\bar{R}$ ,其中, $a$  可以查阅表 17。

表 17 累积和坐标纸的极差刻度系数

子组大小	$a$	子组大小	$a$
2	1.50	6	0.65
3	1.00	8	0.55
4	0.85	10	0.50
5	0.75		

## 步骤 8 建立累积和模板

使用步骤 3 选定的  $h$  和  $f$ ,计算:

a)  $H = h\bar{R}$ ;

b)  $F = f\bar{R}$ 。

使用  $H$  和  $F$  的计算值来构造模板,并按照累积和坐标纸选定的刻度来标注模板。

## 步骤 9 计算试用数据累积和

利用步骤 6 确定的目标值和类似于表 14 的表格,计算试用数据的极差累积和值。

## 步骤 10 绘制试用数据累积和图

如 9.3.1 之步骤 7 和步骤 10 所述,将极差累积和绘制在极差累积和坐标纸上。

## 步骤 11 检查试用数据累积和图是否发生失控

如 9.3.1 之步骤 11 所述,检查累积和图。

## 步骤 12 识别并消除特殊原因

方法如下:

## a) 通则

有必要考察累积和图上的任一失控点,并识别导致失控的特殊原因。

如有必要,可依照下列情形修订目标极差,同时修订对应的模板和可能的均值控制累积和坐标纸。

## b) 识别特殊原因并防止复发

一旦识别出特殊原因,就采取措施防止其未来复发,目标极差值可能需要修订。如果只观测到一个失控点,且其已经如 a) 所述圆满处理,则先前指派的目标值,可根据剔除失控子组数据后的原始试用数据进行修正。修订累积和坐标纸的刻度计算和模板的几何尺寸,并根据需要,重新标注坐标纸和模板刻度。

如果试用数据中出现多个失控点,就表明该过程存在更多问题。建议对该过程进行审查、校正之后,启动一个全新的试用期,并根据所得新数据,重新建立新的累积和图。

## c) 识别特殊原因,但不阻止其复发

出于经济或技术考虑,有时特殊原因是不能预防的。

在这类情况下,累积和图参数根据所有的试用数据确定,并使用其继续进行监控。换言之,这些特殊原因被看作是过程随机波动的一部分。

d) 未能识别的特殊原因

如果特殊原因依然无法识别,则采取上述 c) 中的措施。

这总是很不理想的,因为它会抑制了过程改进。宜尽各种努力去调查特殊原因。

步骤 13 继续进行持续控制图监控

方法如下:

a) 通则

如 9.3.1 之步骤 13 所述,继续控制图监控。

b) 过程措施

与监控均值的情形一样,如果观察一个失控信号,则发生变化的量可根据累积和梯度来估计。在该情形下,解释波动已经改变了多少,这里以  $\bar{R}$  作为单位表示。

如果累积和方向显示极差增大,在某些设备或机械情况下,应对措施可以是联系维修工程师维修设备。如果维修成功,宜记录所采取措施,累积和值重置为零,并许可该过程继续进行。如果过程已恢复到先前的波动水平,则累积和控制图将在“受控”状态下运行。

如果累积和方向显示极差减小,通常认为是一个很好的事件,宜查明特殊原因,并采取措施保持该优良状态。如果上述措施均奏效,宜调整均值和极差的模板(和可能的图形文件)来反映新的工况。极差目标值也宜重新评估到一个新的更低水平。然后,在继续绘制控制图之前,极差累积和图宜重置零位。

均值累积和控制图不必重新置零位,但根据使用均值监控模板对该段时间先前绘制点的审查,现在已经知道极差确实降低了。现在可以从均值控制图中观察到新的失控点。

c) 波动估计——抗摆动

与位置监控累积和图情形一样,如果认为有必要可以采取抗摆动措施。根据实践经验,建议使用者设置抗摆动因子为 75%,对过程波动进行调整。

### 9.4.3 子组标准差累积和方案

监控标准差的累积和方案建立程序与子组极差监控非常相似。因此,在本条,只列出相对于 9.4.2 的变化,且宜与 9.4.2 的内容结合在一起使用。

这里,监控标准差的方案依赖于每个子组要有一个以上的观测值。如果数据是按照一次观察一个单值收集的,例如每月销售数字,监控波动要优选基于相继偏差的极差方法。

步骤 3 选取标准差累计和方案

表 18 为标准差监控累积和方案的典型要求,明确提出了一套标准方案。本表提供了两种基本方案,一种方案是在期望波动水平下的平均链长(ARLs)较长,即 CS1 方案,而另一种方案的平均链长较短,即 CS2 方案。CS2 方案会比 CS1 方案多发出几个虚警信号,但检测重要变化的速度比对应的 CS1 方案稍快。表 19 介绍了这些标准方案的性能差异。

选择 CS1 方案和 CS2 方案其中之一。宜采用与子组均值方案选择相同的选择准则。当没有变化发生时,如果需要一个较长的 ARL,选择 CS1 方案;否则,选择 CS2 方案。

无论选择哪一种方案,这些参数值都宜乘以波动估计  $\hat{\sigma}_0$ ,来确定模板的实际尺寸和形状。这在步骤 5 中描述。

表 18 子组标准差的标准累积和方案

子组大小	CS1 方案		CS2 方案	
	$h$	$f$	$h$	$f$
2	2.00	0.50	2.00	0.25
3	1.60	0.35	1.60	0.15
4	1.15	0.35	1.15	0.20
5	0.90	0.35	0.90	0.20
6	0.80	0.32	0.80	0.20
7	0.70	0.30	0.70	0.20
8	0.60	0.30	0.60	0.20
9	0.55	0.30	0.50	0.20
10	0.50	0.30	0.50	0.20
12	0.40	0.30	0.40	0.20
15	0.35	0.27	0.35	0.18
20	0.30	0.23	0.30	0.16
注 1: 当过程在期望波动水平运行时, CS1 方案给出的平均链长 $L_0$ 介于 700~1 000。				
注 2: 当过程在期望波动水平运行时, CS2 方案给出的平均链长 $L_0$ 介于 150~200。				

表 19 子组标准差的标准累积和方案性能(ARL)对比

子组大小	实际过程波动水平	CS1 方案	CS2 方案
2	$\sigma_0$	920.0	185.0
	$2\sigma_0$	7.4	5.6
	$4\sigma_0$	2.3	2.1
3	$\sigma_0$	920.0	155.0
	$2\sigma_0$	4.4	3.7
	$4\sigma_0$	1.6	1.5
4	$\sigma_0$	840.0	180.0
	$2\sigma_0$	3.2	2.6
	$4\sigma_0$	1.3	1.2
5	$\sigma_0$	820.0	155.0
	$2\sigma_0$	2.6	2.2
	$4\sigma_0$	1.1	1.1
6	$\sigma_0$	850.0	190.0
	$2\sigma_0$	2.2	1.9
	$4\sigma_0$	<1.1	<1.1

表 19 (续)

子组大小	实际过程波动水平	CS1 方案	CS2 方案
8	$\sigma_0$	720.0	180.0
	$2\sigma_0$	1.7	1.6
	$4\sigma_0$	1.0	1.0
10	$\sigma_0$	930.0	200.0
	$2\sigma_0$	1.5	1.4
	$4\sigma_0$	1.0	1.0
12	$\sigma_0$	840.0	170.0
	$2\sigma_0$	1.3	1.2
	$4\sigma_0$	1.0	1.0
15	$\sigma_0$	860.0	170.0
	$2\sigma_0$	1.2	1.1
	$4\sigma_0$	1.0	1.0
注：表格数值为平均链长(ARLs)。读者宜知道,检测一个实际变化的实际链长是会变化的,可能短于、也可能长于平均链长(ARL)。在对此特别感兴趣时,读者宜检查相对目标值特定偏移的链长分布,来了解可能经历的链长期望范围。			

步骤 5 根据试用期数据估计  $\sigma_0$

方法如下：

- 对每个子组,计算子组标准差( $s$ );
- 计算平均子组标准差( $\bar{s}$ )。

估计子组标准差  $\hat{\sigma}_0 = \bar{s}/c_4$ , 其中,  $c_4$  值可以从表 20 中读出。

步骤 6 确定目标值  $T$

方法如下：

- 给定值

在统计质量或过程控制中,设定目标子组标准差的最常用方法,如后续 b)所述。然而,在有些场合下,可以根据一些假定的  $\sigma_0$  水平,优选目标值。如果这样,目标子组标准差按式(5)计算。

$$T = c_4 \sigma_0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

式中：

$c_4$  值可以从表 20 读出。

- 基于性能的值

根据试用期获得的数据,设置目标子组标准差等于  $s$ 。

表 20 估计子组标准差的系数  $c_4$ 

子组大小 $n^a$	$c_4$	子组大小 $n^a$	$c_4$
2	0.797 9	8	0.965 0
3	0.886 2	9	0.969 3
4	0.921 3	10	0.972 7
5	0.940 0	12	0.977 6
6	0.951 5	15	0.982 3
7	0.959 4	20	0.986 9
<sup>a</sup> 当 $n > 20$ 时, $c_4$ 值存在, 可参照 GB/T 17989.2 或者其他教科书或标准。			

## 步骤 7 建立累积和工具

建立一个累积和表(或添加到已有的累积和表中), 并发展累积和坐标纸。

绘制子组标准差累积和的累积和坐标纸可能需要一个与监控过程均值不同的刻度。合适的刻度, 可以利用下面的计算, 上下修约至最近的适当值来得到。

子组标准差的累积和刻度间隔是  $a\sigma_0$ , 其中,  $a$  可查阅表 21。

## 步骤 8 建立累积和模板

使用步骤 3 选定的  $h$  和  $f$ , 计算:

a)  $H = \hat{\sigma}_0$ ;

b)  $F = f\sigma_0$ 。

使用  $H$  和  $F$  的计算值来构造模板, 并按照累积和坐标纸选定的刻度来标注模板。

表 21 子组标准差累积和坐标纸的刻度系数

子组大小	$a$	子组大小	$a$	子组大小	$a$
2	1.50	5	0.75	10	0.50
3	1.00	6	0.65	15	0.40
4	0.85	8	0.55	20	0.35

## 9.5 特殊情形

## 9.5.1 大的组间变异

在某些情况下, 允许将一些均值的组间变异视为随机变异的一部分变得很重要。其中一个例子是累积和图检测的均值微小波动, 但没有计划去消除它们。为防止累积和持续显示失控状态, 这些微小波动宜在变异估计中考虑。

计算组间均值标准差(称为均值标准误差)  $s_{\bar{x}}$ 。微小波动可能来自于试用期数据, 或者数据具有变异代表性的一些其他阶段。在标注累积和坐标纸和模板的刻度时, 使用  $s_{\bar{x}}$  值, 而不是先前均值设置时使用的  $\sigma_0$ 。附录 A 提供了一种有助于识别该方法适用性的方法。

该程序宜具有在累积和图中, 实现减少小且可能“虚假”的失控信号数量的期望效果, 并作出更为适当的质量控制。

## 9.5.2 一次一个观测的数据

累积和图监控的一些主体, 会根据它们一次一个观测的特征产生数据, 而且该数据的任何分组打算

变得毫无意义。先前给出的例子可以是月度销售数字,或者制造过程中化学反应槽的温度,在近似相同的时间内,记录多次重复测量温度,将不显示观测之间的任何变异。在该情形下,子组内部波动变为零,因此,无法画出模板。

另外一个例子是确定高尔夫得分的方式。一些洞可以有不同的期望击球次数,而高尔夫球员则根据每个洞的期望次数与实际次数的差异来估量表现。偏差的总和就变为累积和。

当采集和分析样本非常昂贵时,也会产生子组大小为 1 的情形。

所采取的方法宜设置子组大小为 1,然后按照 9.3 标出的步骤和它们的附注,设置子组大小为 1,即  $n=1$ 。因此,用单值观测数据自身来监控位置(均值水平),而利用连续观测的极差来监控波动。

均值目标值宜根据试用期阶段数据确定的  $T=\bar{x}$  给出,或采用给定目标值。极差目标值应根据试用数据移动极差确定的  $\bar{R}$  给出,或设置为  $T=1.128\sigma$ ,这时要求标准差已经给定。尽管子组大小是 1,有关极差的有效子组大小是 2。

### 9.5.3 观测间的序列相依性

与任何控制图一样,累积和图的基础是不同的绘制点相互独立。将有一定的过程或者数据集,不符合独立性假设,例如,工作存在一些闭环控制器的过程,比如,调温器传递信息给加热装置;或季节性预期的过程,比如,销售数据。

序列相依性对累积和图的影响是会严重而剧烈地影响其性能,在一些情形下会导致误警信号,甚至会遗漏一个重要数量的变化。

统计检验会显示数据是否存在序列相依性,以及该关联是“正”相关还是“负”相关。一种直接方法是测量按照产生顺序的原始数据与其位移一位的相同数据之间的关系,即原始数据的第一个观测与第二个观测对比,第二个观测与第三个观测对比,等等。如果计算得到的相关系数远大于零,这表明观测之间存在正相关关系,即观测值一般在同一方向移动。如果相关系数远小于零,则表明存在负相关关系,显示如果一个观测高于先前的观测,则接下来的观测会趋于相反方向;这是过度校正的过程的一个共同特征。使用电子表格程序或其他统计软件包,容易计算这类相关性,并推荐进行该分析。

相关系数在  $-1\sim 1$  变化,与零显著不同的一个值的阈值依赖于在研究中使用多少个数据点。如果数据集小,一个看似大的相关系数数值,在统计意义上不再显著;而对一个很大的数据集,相关系数非常近,接近于零,可解释为统计显著的。表 22 给出了显著相关系数的近似指导。

表 22 相关系数临界范围

“成对”数据点的个数	相关系数的临界范围 <sup>a</sup>
10	$\pm 0.45$
15	$\pm 0.37$
20	$\pm 0.33$
25	$\pm 0.30$
<sup>a</sup> 在 0.05 显著性水平上(双侧)。	

如果相关系数的计算值落在表 22 给出的临界范围内,则没有理由认为其具有序列相依性。也可能存在一些较弱的序列相依性,只是样本量太小无法检测。

如果发现序列相依性,可能需要专家帮助确定最佳方式。采取的措施,包括对相依性原因的深度过程分析。解决该方法可以是简单的,也可以是复杂的。如果相依性是由季节性变化引起的,可以通过调整每个时间段的目标值来解决该问题。按照这种方式,可使累积和值与季节性独立。

#### 9.5.4 离群值

累积和图要求避免离群值。如果出现一个离群值,它对累积和值的影响可能是巨大的,也可能导致一个虚假的失控信号。下述方法是累积和图避免受离群值影响的一种简单而有效的方法:

a) 结果被视为离群值,如果:

- 1) 子组均值偏离目标值超过 $\pm 3\sigma_e$ ;或
- 2) 单个观测值偏离目标值超过 $\pm 3\sigma$ 。

则记录该结果为一个离群值,但不将该值添加到累积和计算中,除非后续结果落在警戒限之外。

b) 结果为疑似离群值,如果:

- 1) 子组均值偏离目标值超过 $\pm 2\sigma_e$ ;或
- 2) 单个观测值偏离目标值超过 $\pm 2\sigma$ 。

如果连续两个结果超出警戒限,把这两个值都添加到累积和计算中。这几乎总是导致一个失控信号。

注:检测离群值有更为严格的方法(GB/T 6379.5),但这些方法对“实时”监控不是很适用。这里描述的方法是一种简单实用的方法。

### 9.6 离散数据的累积和图

#### 9.6.1 事件计数——泊松数据

##### 9.6.1.1 通则

这里可计数的数据与事件计数相关,其中数据的每一项是每个给定时间或者给定产品数量下的特定事件的计数。例如,每月发生的事故数或人员缺席数,每天的机器运行数或航班架次数,每分钟的电话呼叫次数,或每个单位或批次的不合格数。

在累积和分析中,泊松分布起到两个主要作用:

- a) 当  $n$  很大且  $p$  很小时,比如:  $n > 20$  且  $p < 0.1$ ,泊松分布可近似服从二项分布(见 9.6.2)。
- b) 作为一个分布的固有特点,当事件在时间或空间上随机发生时,观测表示给定区间内的事件发生的个数。

泊松模型的有效性取决于事件的独立性和它们发生率处于一个稳定的平均频率(在没有特殊原因的情况下)。

由于泊松模型普遍缺乏对称性,宜使用不同的判定准则评估向上和向下方向上的偏移。因此,如果采用截顶 V 型模板,模版将不再和之前一样是对称的。上半模版和下半模版的斜率和判定区间会采用不同的值。

对于更明显的复杂情况,为了简化计算,一些分布有时会用其他分布来近似。例如,在一定条件下,泊松分布或正态分布可用来近似二项分布;而在其他情形下,正态分布可用来近似泊松分布。

在 9.3 和 9.4 中,正态分布数据的平均链长(ARLs),可根据均值为 0 和方差为 1 的标准正态分布的平均链长简单确定。这对离散分布并不适用。每个参数都宜单独计算。因此,离散累积和设计目的的表格,自然被限制在只向上移动的组合选择上。最近,常规软件的随时可用已经显著增加了离散数据累积和设计的选择。

##### 9.6.1.2 离散数据的通用累积和判定准则

离散数据的累积和方案是根据数据的分布类型和两个参数—基准值  $K$  和判定区间  $H$ ,唯一确定的。参数选择的关键考虑如下:

- a) 累积和判定方案设计,本质上由两个阶段组成:
- 1) 选择参数  $K$  和  $H$ ,得到期望的受控平均链长;
  - 2) 对各种适当均值偏移信号响应的快速测定。
- b) 基准值  $K$  的选择应以信号要表征的均值具体偏移为基础。一个适当的  $K$  值是在受控均值和失控均值之间选择一个值,使得累积和具有最大灵敏度。 $K$  的具体值依赖于数据的分布类型和均值的可接受值的定义。

### 9.6.1.3 计数数据累积和方案

步骤 1 确定事件的实际平均发生率  $m$  和标准差  $\sigma_e$ 。

步骤 2 选择参照发生率或目标发生率  $T_m$ ,通常取为  $m$  的值。

步骤 3 确定最合适的判定准则来选择累积和方案。首选方案是:在平均链长具有至少 1 000 的目标值时,选择 CS1 方案,或在平均链长具有至少 200 的目标值时,选择 CS2 方案。如表 23 所示。

表 23 不同  $H_m$ ,  $H$  和  $K$  下,泊松数据的 CS1 和 CS2 方案

目标事件率 $T_m$	CS1 方案		CS2 方案	
	$H$	$K$	$H$	$K$
0.100	1.5	0.75	2.0	0.25
0.125	2.5	0.50	2.5	0.25
0.160	3.0	0.50	2.0	0.50
0.200	3.5	0.50	2.5	0.50
0.250	4.0	0.50	3.0	0.50
0.320	3.0	1.00	4.0	0.50
0.400	2.5	1.50	3.0	0.50
0.500	3.0	1.50	2.0	1.50
0.640	3.5 <sup>a</sup> 或 4.0	1.50	2.0	2.00
0.800	5.0	1.50	3.5	1.50
1.000	5.0	2.00	5.0	1.50
1.250	4.0	3.00	5.0	2.00
1.600	5.0	3.00	4.0	3.00
2.000	7.0 <sup>a</sup> 或 8.0	3.00	5.0	3.00
2.500	7.0	4.00	5.0	4.00
3.200	7.0	5.00	5.0	5.00
4.000	8.0	6.00	6.0	6.00
5.000	9.0	7.00	7.0	7.00
6.400	9.0	9.00	9.0	8.00
8.000	9.0	11.00	9.0	10.00
10.000	11.0	13.00	11.0	12.00

表 23 (续)

目标事件率 $T_m$	CS1 方案		CS2 方案	
	$H$	$K$	$H$	$K$
15.000	16.0	18.00	11.0	18.00
20.000	20.0	23.00	14.0	23.00
25.000	24.0	28.00	17.0	28.00
<p>注 1: 在目标水平处,CS1 方案给出的平均链长通常介于 1 000~2 000 个观测之间。在目标水平处,CS2 方案给出的平均链长通常介于 200~400 个观测之间。</p> <p>注 2: 对 <math>T_m &lt; 1</math>, 推荐刻度作为一个提醒, 单个观测值包含孤立的有限信息。确定发生一个事件需要的平均观测次数, 即 <math>1/T_m</math>。为绘图和采用其为累积和图的水平间隔, 将该值修约到一个方便的整数。按照与水平刻度相同长度的区间, 划分累积和图纵坐标刻度, 并按照零以上和以下的连续偶数标注它们, 即 0、+2、+4... 与 -2、-4...</p> <p>注 3: 根据优先数系的 R10 系列选择一直到 10 的 <math>T_m</math> 值, 该系列在每 10 个一组的连续输入之间, 给出 10 个大致相等的比率。</p> <p>注 4: 对从 10~25 的 <math>T_m</math>, 采用等间距的值, 以便插值。该区域的中间方案可由 <math>H</math> 和 <math>K</math> 的同时线性插值, 并修约为整数得到。最好采用相同方式, 同时修约 <math>H</math> 和 <math>K</math>。</p>				
<p><sup>a</sup> <math>H</math> 的较低取值给出的平均链长 <math>L_0</math> 略小于 1 000; 其较高值给出的 <math>L_0</math> 接近 2 000。</p>				

步骤 4 确定  $H$  和  $K$  的值

方法如下:

- a) 当  $0.1 \leq T_m \leq 25.0$  时, 在表 23 中选择与  $T_m$  最接近的值。对介于 10.0~25.0 的  $T_m$  值, 采用线性插值方法。
- b) 当  $T_m > 25.0$  时, 参照 9.3 有关正态分布的适当表格, 泊松分布近似为正态分布, 其标准差  $\sigma_c = \sqrt{T_m}$ 。

作为一个例子, 假定  $T_m = 25.0$ 。对均值为 25.0 和标准差为 5.0 的正态变量,  $H = 24.0$  和  $K = 28.0$ ; 相应的平均链长约为 1 500。对  $H = 24.0$  和  $K = 28.0$  的泊松变量, 其真实平均链长为 1 085。平均链长缩短的原因在于泊松分布的偏态性和离散性。

## 步骤 5 构造和使用 V 型模板与累积和表

方法如下:

- a) 对累积和图: 绘制差值  $(X - T_m)$  的累积和, 并使用判定区间为  $H$  和斜率为  $F (= X - T_m)$  的截顶 V 型模板;
- b) 对于表格化累积和: 计算差值  $(X - K)$  的累积和, 在累积和取负值, 将其恢复到零。对一个偏移信号, 对照  $H$  进行测试。

## 步骤 6 对从名义上感兴趣的偏移, 使用表 24, 评估选定方案的平均链长性能

示例:

步骤 1 确定事件的实际平均发生率和标准差。

步骤 2 参照平均发生率  $T_m = 4.0$ 。

步骤 3 使用 CS1 方案。

步骤 4 在表 23 中找到  $T_m = 4.0$ , 查表得到  $H = 8.0$ ,  $K = 6.0$ 。步骤 5a) 绘制累积和, 构造和使用 V 型模板 ( $H = 8.0$ ,  $F = 2.0$ )。

步骤 5b) 制表并构建一个表格化累积和( $H=8.0, K=6.0$ )。

步骤 6 根据  $H=8.0, K=6.0$ , 从表 24 检索到其方案的性能如表 24 之第 26 行所示。当过程在目标水平运行时, 平均链长( $L_0$ )为 1 736。然而, 如果发生率升高到 6.60, 平均链长会降至 10。

表 24 计数(泊松)数据在不同  $H$  和  $K$  组合的累积和方案下的平均链长特征

参数		CS1 方案		CS2 方案		在标称平均链长下的平均发生率								
$H$	$K$	$T_m$	$L_0$	$T_m$	$L_0$	1 000	500	200	100	50	20	10	5	2
2.0	0.25	—	—	0.100	212	0.057	0.072	0.102	0.135	0.179	0.29	0.43	0.74	1.99
2.5	0.25	—	—	0.125	227	0.078	0.097	0.131	0.166	0.220	0.33	0.49	0.82	2.12
2.0	0.50	—	—	0.160	230	0.095	0.121	0.168	0.220	0.280	0.42	0.59	0.91	2.09
1.5	0.75	0.100	1 033	—	—	0.120	0.130	0.181	0.240	0.320	0.46	0.66	0.99	2.11
2.5	0.50	0.125	1 371	0.200	278	0.138	0.167	0.220	0.280	0.350	0.49	0.68	1.05	2.32
3.0	0.50	0.160	1 609	0.250	264	0.179	0.210	0.270	0.330	0.400	0.56	0.77	1.12	2.74
3.5	0.50	0.200	1 461	—	—	0.220	0.250	0.310	0.370	0.440	0.60	0.84	1.31	3.02
4.0	0.50	0.250	966	0.320	271	0.250	0.280	0.340	0.400	0.470	0.65	0.91	1.41	3.37
3.0	1.00	0.320	1 174	0.400	446	0.330	0.390	0.480	0.570	0.690	0.91	1.17	1.63	3.08
2.0	1.50	—	—	0.500	260	0.360	0.420	0.540	0.640	0.780	1.04	1.32	1.78	3.17
2.5	1.50	0.400	1 103	—	—	0.410	0.490	0.610	0.730	0.890	1.15	1.46	1.93	3.37
2.0	2.00	—	—	0.640	221	0.420	0.510	0.650	0.790	0.970	1.27	1.58	2.09	3.44
3.0	1.50	0.500	1 475	—	—	0.540	0.620	0.740	0.860	1.010	1.28	1.60	2.12	3.85
4.0	1.50	0.640	1 843	—	—	0.700	0.790	0.920	1.040	1.190	1.47	1.81	2.38	4.44
5.0	1.50	0.800	1 439	1.000	274	0.840	0.920	1.040	1.160	1.310	1.60	1.95	2.64	5.25
5.0	2.00	1.000	1 904	1.250	259	1.090	1.190	1.350	1.500	1.680	2.00	2.37	3.09	5.90
4.0	3.00	1.250	1 867	1.600	354	1.380	1.530	1.750	1.950	2.200	2.61	3.04	3.76	6.35
5.0	3.00	1.600	1 118	2.000	188	1.640	1.770	1.940	2.180	2.420	2.83	3.29	4.07	6.60
7.0	3.00	2.000	894	—	—	1.980	2.110	2.310	2.490	2.710	3.09	3.57	4.59	7.55
8.0	3.00	2.000	1 927	—	—	2.110	2.330	2.430	2.600	2.810	3.23	3.78	4.80	8.40
5.0	4.00	—	—	2.500	300	2.170	2.350	2.600	2.870	3.160	3.63	4.16	5.00	7.60
7.0	4.00	2.500	1 761	—	—	2.620	2.800	3.050	3.260	3.450	3.99	4.53	5.60	8.85
5.0	5.00	—	—	3.200	245	2.730	2.940	3.270	3.560	3.890	4.45	5.00	6.00	8.50
7.0	5.00	3.200	1 318	—	—	3.280	3.480	3.780	4.030	4.320	4.88	5.50	6.50	9.80
6.0	6.00	—	—	4.000	373	3.640	3.880	4.240	5.550	4.930	5.50	6.20	7.20	10.40
8.0	6.00	4.000	1 736	—	—	4.160	4.380	4.710	5.000	5.300	5.90	6.60	7.80	11.50
7.0	7.00	—	—	5.000	348	4.600	4.840	5.200	5.600	5.900	6.60	7.30	8.50	11.60
9.0	7.00	5.000	1 268	—	—	5.100	5.300	5.700	6.000	6.400	6.90	7.70	9.10	13.50
9.0	8.00	—	—	6.400	226	5.800	6.100	6.500	6.800	7.200	7.90	8.60	10.00	14.20
9.0	9.00	6.400	1 351	—	—	6.500	6.800	7.200	7.600	8.100	8.80	9.60	11.10	15.20

表 24 (续)

参数		CS1 方案		CS2 方案		在标称平均链长下的平均发生率								
$H$	$K$	$T_m$	$L_0$	$T_m$	$L_0$	1 000	500	200	100	50	20	10	5	2
9.0	10.00	—	—	8.000	213	7.200	7.600	8.000	8.400	8.900	9.70	10.50	11.90	16.20
9.0	11.00	8.000	946	—	—	8.000	8.300	8.800	9.300	9.800	10.50	11.40	13.00	16.40
11.0	12.00	—	—	10.000	234	9.300	9.600	10.100	10.500	11.000	11.90	12.80	14.60	19.80
11.0	13.00	10.000	1 052	—	—	10.000	10.400	11.000	11.400	11.900	12.70	13.70	15.50	20.30
11.0	18.00	—	—	15.000	214	13.900	14.300	15.100	15.600	16.300	17.40	18.50	20.40	25.90
16.0	18.00	15.000	1 289	—	—	15.100	15.500	16.100	16.500	17.200	18.20	19.40	21.70	29.10
14.0	23.00	—	—	20.000	215	18.800	19.300	20.100	20.700	21.400	22.60	24.00	26.20	32.90
20.0	23.00	20.000	1 140	—	—	20.100	20.500	21.100	21.700	22.300	23.50	24.90	27.60	36.80

注：本表考虑均值向上移动。

## 9.6.2 成败型数据——二项数据

### 9.6.2.1 通则

对分类数据,数据的每个项目都按照数据所属的类别进行分类。类别的数量经常是 2,即二项的情形,例如,结果通常被表示为 0 和 1,或通过/失败、利润/损失、进/出,或某个特定特征的存在与否。

有两个类别的数据被称为“二项”数据。一个测量可以天生是二项的,例如,是产生利润还是损失,某人是要进来还是出去?有时,通过一些其他数值测量的分类,间接得到二项数据。以电话呼叫为例,呼叫可按照接听时间是否超过 10 min,或响铃 6 次以内应答与否对通话情况分类。

对二项分布,宜满足的条件如下:

- 具有固定的试验次数  $n$ ;
- 每次试验只有两种可能的结果;
- 试验是独立的;
- 每次试验的“成功”概率  $p$  是一个常数;
- 变量是  $n$  次试验中“成功”的总数。

二项分布的计算非常繁琐,因此,在处理平均链长和判定准则时,可采用其他分布来近似二项分布。

由于两个二项分布参数  $n$  (常对应于样本量)和  $p$  (具有关注属性的项目比例)的取值范围广泛,对所有的组合提供综合表是不切实际的。而对这种取值范围较宽的情形,可以利用近似处理解决。这些程序如下:

——情形 1:当  $T_p < 0.1$  (即,目标比例或参照比例低于 10%)时,使用具有  $T_m = np$  的泊松变量的适当方案;

——情形 2:当  $T_m > 20$  (即,在目标条件下,每个样本的“事件”平均数超过 20)时,使用正态分布的适当方案。

### 9.6.2.2 情形 1: $T_p < 0.1$ ——基于泊松分布的方案

尽管,这里二项分布是合适的,但其使用过于麻烦,因此,可以使用泊松分布近似。可使用 9.6.1.3 所述的逐步法,只是  $T_m = np$ 。在目标水平处,泊松分布给出的平均链长会总是短于二项分布的平均链长;但在相对目标条件的可预见偏移下,泊松分布的平均链长将非常接近二项分布在相同的平均事件发

生率的平均链长。

示例：

步骤 1 确定事件的实际平均发生率和标准差。

步骤 2 设  $n=20$  和  $p=0.025$ , 因此,  $np=0.5$ , 进而参照值  $T_m=0.5$ 。

步骤 3 使用 CS1 方案。

步骤 4 在表 23 中找到  $T_m=0.5$ 。因此,  $H=3.0, K=1.5$ 。

步骤 5a) 绘制累积和图, 构造和使用 V 型模板 ( $H=3.0, F=1.0$ )。

步骤 5b) 制表并构建一个累积和表 ( $H=3.0, K=1.5$ )。

步骤 6 根据  $H=3.0, K=1.5$ , 从表 24 检索到其方案的性能如表 24 之第 13 行所示。当过程处于目标值水平, 平均链长 ( $L_0$ ) 为 1 475。然而, 如果发生率升高到 1.60, 即  $p=0.080$ , 平均链长会降至 0。

### 9.6.2.3 情形 2: $T_m > 20$ ——基于正态分布的方案

在情形 2, 其响应为正态变量, 选择参数  $h, f$  的一对合适值, 例如, 5 和 0.5; 得到的二项分布累积和参数如下, 见式(6)~式(8)。

$$H = h \times \sqrt{nT_p(1-T_p)} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$K = nT_p + [f \times \sqrt{nT_p(1-T_p)}] \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$F = f \times \sqrt{nT_p(1-T_p)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

将  $H, K$  和  $F$  修约为最近的整数。

示例：

步骤 1 确定事件的实际平均发生率和标准差。

步骤 2 设  $n=80$  和  $T_p=0.3, h=5.0$  和  $f=0.5$ 。

步骤 3 使用修正方案。

步骤 4  $H = h \times \sqrt{nT_p(1-T_p)} = 5 \times \sqrt{80 \times 0.3(1-0.3)} \approx 20.0$

$K = nT_p + [f \times \sqrt{nT_p(1-T_p)}] = 80 \times 0.3 + [0.5 \times \sqrt{80 \times 0.3(1-0.3)}] \approx 26.0$

$F = f \times \sqrt{nT_p(1-T_p)} = 0.5 \times \sqrt{80 \times 0.3(1-0.3)} \approx 2.0$

步骤 5a) 绘制累积和, 构造和使用 V 型模板 ( $H=20.0, F=2.0$ )。

步骤 5b) 制表并构建一个表格化累积和 ( $H=20.0, K=26.0$ )。

步骤 6 当过程处于目标值水平, 平均链长 ( $L_0$ ) 近似为 930。然而, 如果比率  $p$  升高到 0.35, 则平均链长会降至 10。

附 录 A  
(资料性附录)  
冯诺依曼方法

当建立一个以数据展示为目的的累积和图时,变异测量程序的选择,在很大程度上取决于数据的性质、抽样方法和可能的计算便利。然而,宜谨慎选择对变点或水平偏移实施的统计检验,并且宜考虑连续值之间序列相依的可能性或循环现象的可能性。

根据观测序列中异常现象的一个有用的通用检验,标准误差估计如下:

- 1) 计算  $s_x^2$ ;
- 2) 计算  $\sum_{i=2}^k w_i^2$ ;
- 3) 统计子组数  $k$ ;
- 4) 计算  $\frac{\sum_{i=2}^k w_i^2}{2(k-1)s_x^2}$ ;
- 5) 计算  $1 \pm \frac{2}{\sqrt{(k+2)}}$ 。

如果步骤 4) 计算得出的值位于步骤 5) 计算的上界之上,其含义是具有负序列相关性,例如,过度控制或交替。由于循环或其他形式的正序列相关,会出现低于下限的值,例如,滞后效应,或观测序列内平均水平的变化,无论是有规律还是无规律的阶跃变化、漂移或趋势。

此外,步骤 4) 的计算值可根据表 A.1 中的 0.05 双尾临界值来评估。

表 A.1 冯诺依曼检验的双尾临界值

子组数	下临界值	上临界值
20	0.58	1.42
30	0.65	1.35
50	0.73	1.27
75	0.78	1.22
150	0.84	1.16
200	0.86	1.14

**附录 B**  
(资料性附录)  
**表格化累积和图示例**

已经确定历史平均值为 35 和标准差为 6,并将它们作为常规控制图与累积和图的参数。目标值设定为 35。

一共收集了 24 天的数据:25.8、33.4、31.6、26.0、36.4、33.0、35.8、41.8、44.2、37.2、35.0、41.8、33.4、38.4、30.2、33.8、42.6、39.6、32.0、48.4、44.6、43.0、40.8 和 50.6。

该数据的常规控制图,如图 B.1 所示。使用标准常规控制图检验,没有识别出任何信号。

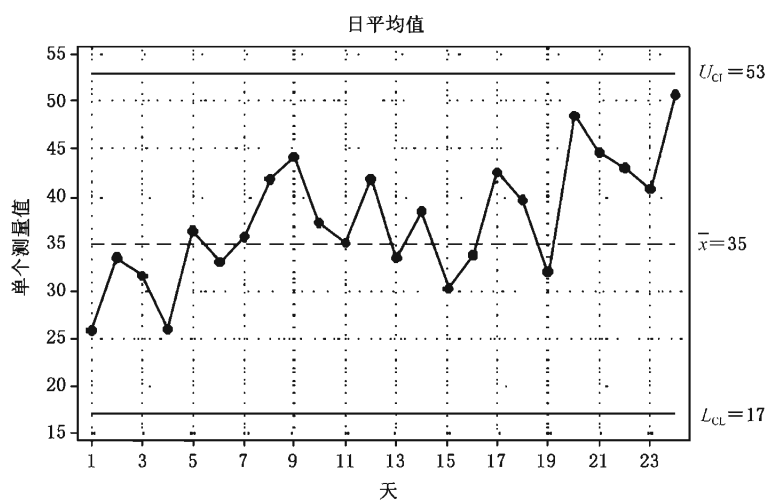


图 B.1 日平均值的常规控制图

数据的累积和图,如图 B.2 所示。显示在第 24 天有一个信号。图 B.1 的常规控制图没有检测到这一变化。

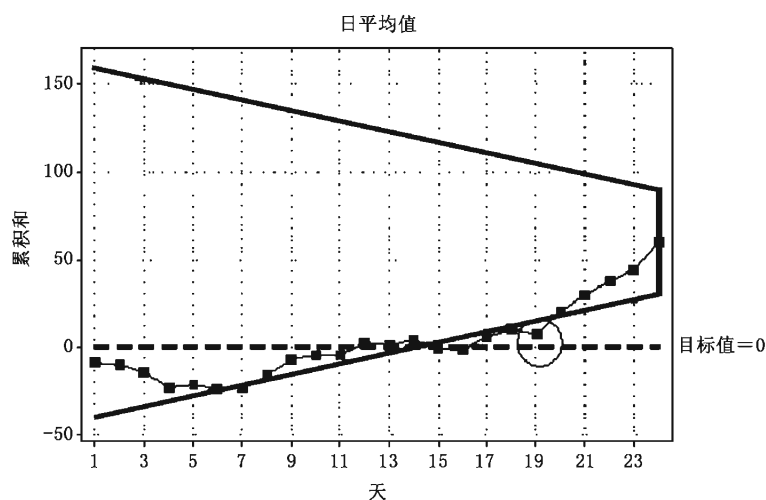


图 B.2 日平均值的累积和图与 V 型模板

该累积和图的表格化版本,如表 B.1 所示。

表 B.1 日平均数据的表格化累积和

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
日期顺序	日平均值 ( $X$ )	$X - T - F$	$H_i$ 累积和	$H_i$ 的正值 累积个数	$X - T + F$	$L_o$ 累积和	$L_o$ 的负值 累积个数
0			15.0	0		-15.0	0
1	25.8	-12.2	2.8	1	-6.2	-21.2	1
2	33.4	-4.6	0.0	0	1.4	-19.8	2
3	31.6	-6.4	0.0	0	-0.4	-20.2	3
4	26.0	-12.0	0.0	0	-6.0	-26.2	4
5	36.4	-1.6	0.0	0	4.4	-21.8	5
6	33.0	-5.0	0.0	0	1.0	-20.8	6
7	35.8	-2.2	0.0	0	3.8	-17.0	7
8	41.8	3.8	3.8	1	9.8	-7.2	8
9	44.2	6.2	10.0	2	12.2	0.0	0
10	37.2	-0.8	9.2	3	5.2	0.0	0
11	35.0	-3.0	6.2	4	3.0	0.0	0
12	41.8	3.8	10.0	5	9.8	0.0	0
13	33.4	-4.6	5.4	6	1.4	0.0	0
14	38.4	0.4	5.8	7	6.4	0.0	0
15	30.2	-7.8	0.0	0	-1.8	-1.8	1
16	33.8	-4.2	0.0	0	1.8	0.0	0
17	42.6	4.6	4.6	1	10.6	0.0	0
18	39.6	1.6	6.2	2	7.6	0.0	0
19	32.0	-6.0	0.2	3	0.0	0.0	0
20	48.4	10.4	10.6	4	16.4	0.0	0
21	44.6	6.6	17.2	5	12.6	0.0	0
22	43.0	5.0	22.2	6	11.0	0.0	0
23	40.8	2.8	25.0	7	8.8	0.0	0
24	50.6	12.6	37.6	8	18.6	0.0	0
注： $T=35$ ； $f=0.5s$ ； $h=5s$ 。							

该累积和图使用了一个“快速初始响应(FIR)”，因此，在“第0天”对“ $H_i$  累积和”和“ $L_o$  累积和”分别设置一个初始值。其初始值分别为 $+2.5s$ 和 $-2.5s$ ，或 $+15.0$ 和 $-15.0$ 。同样，在第0天，将“ $H_i$  的正值累积个数”和“ $L_o$  的负值累积个数”的初始值设置为0。由于 $h=5s$ ，则触发累积和信号的上、下限分别置为 $+30$ 和 $-30$ 。

“第1天”的日平均值为25.8。第3列运算如下：

$$25.8 - 35 - 3 = -12.2$$

将该值 $-12.2$ 与先前的“ $H_i$  累积和”值15.0相加，所得结果为2.8。由于2.8是正数，则“ $H_i$  的正

值累积个数”在先前值 0 的基础上加 1;所得新的“ $H_i$  的正值累积个数”为 1。

第 6 列运算如下:

$$25.8 - 35 + 3 = -6.2$$

将该值 -6.2 与先前的“ $L_0$  累积和”值 -15.0 相加,得到 -21.2。由于 -21.2 是负数,则“ $L_0$  的负值累积个数”在先前值 0 的基础上加 1;所得新的“ $L_0$  的负值累积个数”为 1。

这些运算看起来冗长,但可以使用计算机去完成它们。

“第 2 天”的日平均值为 33.4。第 3 列运算如下:

$$33.4 - 35 - 3 = -4.6$$

将该值 -4.6 与先前的“ $H_i$  累积和”值 2.8 相加,得到 -1.8。因为 -1.8 是负数,则“ $H_i$  累积和”的值变为 0,“ $H_i$  的正值累积个数”也变为 0;即,对于  $H_i$  累积和,只有“正”的累积和值才可以“统计”。

第 6 列运算如下:

$$33.4 - 35 + 3 = 1.4$$

将该值 1.4 与先前的“ $L_0$  累积和”值 -21.2 相加,得到 -19.8。由于 -19.8 是负数,则“ $L_0$  的负值累积个数”在先前值的基础上加 1,即新的“ $L_0$  的负值累积个数”为 2。

持续该过程一直到出现“ $H_i$  累积和”或“ $L_0$  累积和”超出  $h$  的值(在该例子中,分别取为 30 或 -30)。在“第 24 天”出现了上述情况,这时“ $H_i$  累积和”的值为 37.6。

出现“偏移”的时间估计和对应的偏移估计能够从累积和表中得到。注意从表 B.1 可以看出,如果过程在目标值附近运行,FIR 值的作用是使“ $H_i$  累积和”与“ $L_0$  累积和”同时相对更快地下降;否则,通常会得到“ $H_i$  累积和”或“ $L_0$  累积和”的一个失控信号。

本例中,在得到“ $H_i$  累积和”失控信号时,“ $H_i$  的正值累积个数”是 8。这表明该变化发生在“第 16 天”和“第 17 天”之间。假设 FIR 已“消亡”,偏移估计为:

$$F + \frac{H_i \text{ 累积和}}{H_i \text{ 的正值累积个数}}$$

如果显示偏移为负值,则偏移估计由下式给出:

$$-F - \frac{L_0 \text{ 累积和}}{L_0 \text{ 的负值累积个数}}$$

由于“ $H_i$  累积和”超过  $h$  的值 30,则偏移估计为:

$$F + \frac{H_i \text{ 累积和}}{H_i \text{ 的正值累积个数}} = 3 + \frac{37.6}{8} = 7.70$$

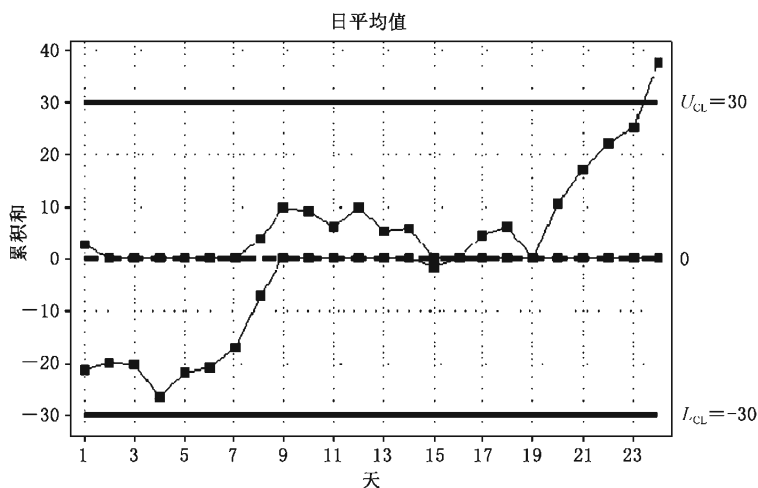


图 B.3 日平均值的表格化累积和图

### 附录 C

#### (资料性附录)

#### 阶跃变化的变点估计

一个过程是否受控,可以根据使用特定准则的控制图作出判定,但控制图不能识别可查明原因。然而,控制图中以往图形的表现可为查找可查明原因提供信息。这是变点估计的一个很重要作用。

在过程均值  $\mu(t)$  存在阶跃变化时,变点  $\tau$  如公式(C.1)所示。

$$\mu(t) = \begin{cases} T, & t = 1, 2, \dots, \tau; \\ T + \delta, & t = \tau + 1, \tau + 2, \dots, \end{cases} \dots\dots\dots (C.1)$$

累积和图在变点估计方面有着良好的表现。变点的估计值就等于累积和路径超出 V 型模板倾斜臂的时间点,如图 C.1 所示。

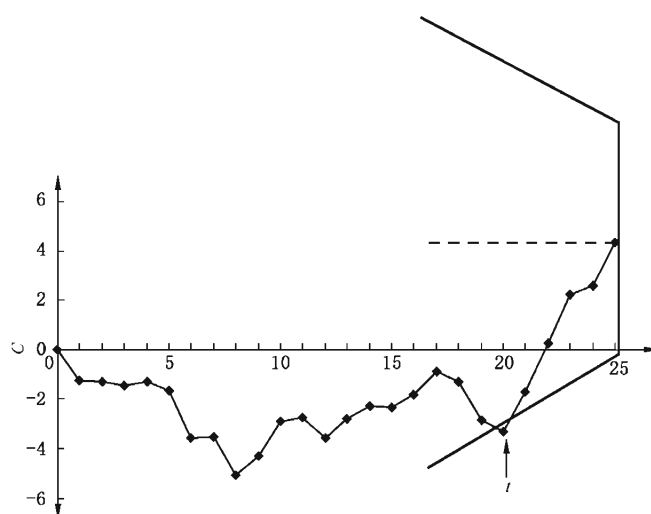
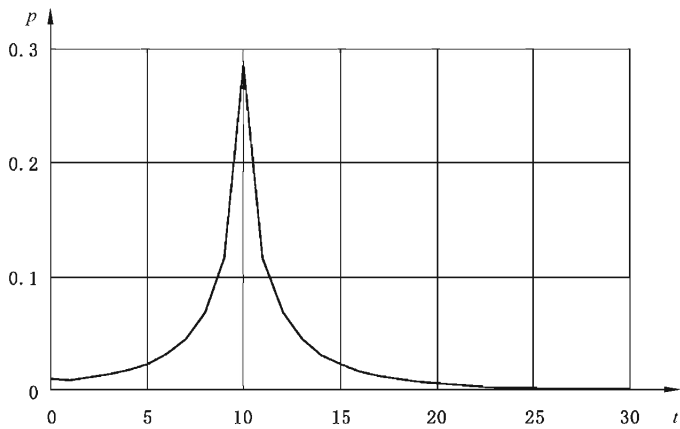


图 C.1 使用截顶 V 型模板的变点估计

图 C.2 显示的是在 CS1 方案( $h=0.5, f=0.5$ )下,由累积和图得到变点估计量的分布。这里宜考虑第一类错误,因为只有当控制图发出信号之后,才会进行变点估计。因此,图 C.2 中的分布是在没有发生第一类错误的条件下得到的。



注：该截顶 V 型模板的参数  $h=5.0, f=0.5, \Delta=1.0, \tau=10.0$ 。

图 C.2 使用累积和的变点估计量的分布

这个分布是单峰的，且其峰值与真实的变点  $\tau=10.0$  完全相同。尽管图 C.2 中偏移的大小并不是非常大，即  $\delta=1.0, \sigma_e=\Delta$ ，该方法仍是首选。

### 参 考 文 献

- [1] GB/T 6379.5 测量方法与结果的准确度(正确度与精密度) 第5部分:确定标准测量方法精密度的可替代方法
- [2] GB/T 19000 质量管理体系 基础和术语
- [3] BS 5703, Guide to data analysis, quality control and improvement using cusum techniques
- [4] NISHINA, K. Estimation of the change-point from cumulative sum tests. Reports of Statistical Application Research, JUSE, 33(4), 1986.
- [5] NISHINA, K. Estimation of the amount of shift using cumulative sum tests. Reports of Statistical Application Research, JUSE, 35(3), 1988.
- [6] NISHINA, K. A comparison of control charts from the viewpoint of change-point estimation. Quality and Reliability Engineering International, 8, 1992.
- 

